ФГОС

11

И. Г. Семакин
Е. К. Хеннер
Л. В. Шестакова

ИНФОРМАТИКА

2

УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
БИНОМ

ФГОС

И. Г. Семакин, Е. К. Хеннер,
Л. В. Шестакова

ИНФОРМАТИКА

УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник для 11 класса

в 2-х частях

Часть 2

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации
к использованию в образовательном процессе
в имеющих государственную аккредитацию
и реализующих образовательные программы
общего образования образовательных учреждениях

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 004.9
ББК 32.97
С30

Семакин И. Г.

С30 Информатика. Углубленный уровень : учебник для 11 класса : в 2 ч. Ч. 2 / И. Г. Семакин, Е. К. Хеннер, Л. В. Шестакова. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 216 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-1688-5 (Ч. 2)
ISBN 978-5-9963-1689-2

Учебник предназначен для изучения курса информатики на углубленном уровне в 11 классах общеобразовательных учреждений. Содержание учебника опирается на изученный в 7–9 классах курс информатики для основной школы и разработано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом для среднего (полного) образования 2012 г. Рассматриваются теоретические основы информатики, аппаратное и программное обеспечение компьютера, современные информационные и коммуникационные технологии.

Учебник входит в учебно-методический комплект, включающий также учебник для 10 класса, практикум и методическое пособие для учителя.

УДК 004.9
ББК 32.97

Учебное издание

Семакин Игорь Геннадьевич
Хеннер Евгений Карлович
Шестакова Лидия Валентиновна

ИНФОРМАТИКА.
УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ
Учебник для 11 класса

В двух частях

Часть вторая

Ведущий редактор *О. А. Полежаева*
Ведущие методисты: *И. Л. Сретенская, И. Ю. Хлобыстова*
Художники: *Н. А. Новак, Я. В. Соловцова, Ю. С. Белаш*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Компьютерная верстка: *В. А. Носенко*

Подписано в печать 20.03.14. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 17,55. Тираж 15 000 экз. Заказ № 35586.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://e-umk.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

При участии ООО Агентство печати «Столица»
www.apstolica.ru; e-mail: apstolica@bk.ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-9963-1688-5 (Ч. 2)
ISBN 978-5-9963-1689-2

Навигационные значки

Обратите внимание на символы навигационной полосы, имеющейся в учебниках. Они означают следующее:

- важное утверждение или определение;
- вопросы и задания;
- материал для подготовки к итоговой аттестации;
- дополнительный материал;
- практические работы на компьютере;
- интернет-ресурсы;
- проектные или исследовательские задания;
- практикум[1].

[1] *Семакин И. Г., Хеннер Е. К., Шеина Т. Ю., Шестакова Л. В.* Информатика. Углубленный уровень: практикум для 10–11 классов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.

Глава 3
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

3.1. Методика математического моделирования на компьютере

3.1.1. Моделирование и его разновидности

Моделирование с помощью компьютеров открывает огромные возможности для исследования явлений и процессов в природе и обществе. Моделирование, будучи мощным средством познания мира, стало в наше время ведущей информационной технологией для многих наук и областей практической деятельности.

Из курса информатики 8 класса вы уже знакомы с понятиями «модель», «моделирование», познакомились с некоторыми примерами реализации моделей на компьютере. В данной главе вам предстоит глубже изучить методы и технологии моделирования. Но сначала повторим основные понятия.

Модель — это упрощенное подобие объекта моделирования. В качестве объекта моделирования может выступать любой объект или процесс реального мира (реальная система). Модель отражает лишь некоторые свойства объекта моделирования, существенные с точки зрения поставленной цели. Модель используется как заменитель реальной системы для воспроизведения ее отдельных функций. Все разнообразие моделей можно разделить на два больших класса: **натурные модели** и **информационные модели.**

Приведем простой пример. Вспомним классическую задачу из школьной математики: через трубу А в бассейн вода втекает, а из трубы Б вытекает. Расходы жидкости в трубах разные, требуется найти количество воды, которое останется в бассейне через определенный промежуток времени. Решить эту задачу можно несколькими способами, рассмотрим три из них.

1. Арендуем настоящий бассейн, наймем рабочих, перекроем все трубы, кроме двух, научимся управлять расходом воды и произведем замеры. Если у вас много лишних средств и недостаточно фантазии, то можно пойти по этому пути.

2. Построим маленький «бассейн» из простейших подручных материалов (например, используем небольшой домашний аквариум), подведем к нему две трубки, присоединим одну к крану, а другую выведем в раковину. Уменьшим в одинаковое число раз расход втекающей в «бассейн» и вытекающей из него воды (по отношению к реальному бассейну) и измерим, сколько ее осталось через указанное в условии задачи время.
3. Не будем ничего арендовать и строить. Составим несложное математическое выражение, определяющее разность между объемом втекающей в бассейн воды и вытекающей из него, подставим заданные значения параметров (расходы воды и время) и вычислим ответ.

Второй и третий подходы являются модельными. Модель из аквариума называется **натурной**, она выполнена из физических материалов, ее можно «потрогать руками». Вторая модель — **информационная**, она представляет собой описание объекта моделирования. В данном примере информационная модель является *математической моделью*, поскольку описывает исследуемый процесс в виде математических формул.

Оба приема, и натурное, и информационное моделирование, реально используются в научных исследованиях и в практических приложениях. Натурное моделирование является весьма эффективным способом исследования, поскольку на уменьшенной и упрощенной копии сложного объекта экспериментировать гораздо проще, дешевле и безопаснее, чем на реальном объекте. Так, при проектировании плотины ГЭС ее обязательно моделируют в специальном бассейне, строя многократно уменьшенную, но подобную копию с целью изучения прочностных и других характеристик плотины. При создании нового самолета его модель испытывают в аэродинамической трубе; подобных примеров в науке и технике существует множество. Однако больше возвращаться к натурному моделированию мы не будем, поскольку предметом изучения в нашем курсе является компьютерное информационное моделирование.

В 9 классе вы узнали, что существуют разные виды информационных моделей: графические (карты, чертежи, схемы, графики), табличные, математические, имитационные и др. Предметом изучения информатики являются методы и технологии информационного моделирования с помощью компьютера — **компьютерного моделирования**.

Основное внимание в данной главе будет уделено **математическим** и **имитационным** моделям. Эти виды моделей широко используются в научных и прикладных исследованиях.

Математическая модель — это описание объекта моделирования на языке математики, а **компьютерная математическая модель** — это программа, реализующая расчеты состояния моделируемой системы по ее математической модели.

Виды математических моделей

Для системного описания большого разнообразия математических моделей требуется их классификация. Удачная классификация способствует лучшему пониманию объекта изучения. Возможны различные подходы к классификации математических моделей:

1) *по отраслям наук* — математические модели в физике, биологии, социологии и т. д.; это естественная классификация с точки зрения специалистов-«прикладников»;
2) *по применяемому математическому аппарату* — модели, основанные на применении уравнений различных классов, статистических методов, алгебраических структур и преобразований и т. д. — это естественная классификация для математика, занимающегося аппаратом математического моделирования;
3) *по основной функции*, реализуемой в моделировании, общим закономерностям моделирования в разных видах человеческой деятельности безотносительно к математическому аппарату; это естественная классификация при изучении общих закономерностей и приемов математического моделирования.

Первые два подхода достаточно очевидны и не нуждаются в комментариях. Поскольку в данной главе изучается в основном компьютерное моделирование, для нас представляет наибольший интерес третий (функциональный) подход. Обсудим его более детально.

При функциональном подходе к классификации математических моделей чаще всего выделяются:

- дескриптивные модели;
- оптимизационные модели;
- многокритериальные модели.

Дескриптивная модель описывает состояние объекта или процесса. Поясним на примерах. Модель движения кометы, вторгшейся в Солнечную систему, описывает (предсказывает) траекторию ее полета, расстояние, на котором она пройдет от Земли, и т. д. Исследователь не может повлиять на движение кометы, что-то в нем изменить. Основным достоинством данной модели являются ее **прогностические** возможности, характерные для большинства дескриптивных моделей.

Приведем еще несколько примеров моделируемых систем, для описания которых применяются дескриптивные математические модели:

- описание развития некоторой популяции животных или растений в зависимости от значений параметров внешней среды;
- описание протекания химической реакции в зависимости от концентрации реагирующих компонентов;
- описание движения воздушных масс в атмосфере, связанное с прогнозированием погоды;
- предсказание солнечных и лунных затмений;
- описание эффективности проведения определенного класса вычислений в зависимости от конфигурации компьютера.

Такой список практически неограничен и может пополняться из любой области знаний и практической деятельности.

Оптимизационные модели. Если исследуемая система допускает внешние воздействия, которые могут изменить ее состояние или поведение, то ею можно управлять для достижения определенных целей. В таких случаях используются оптимизационные модели. В оптимизационную математическую модель входит один или несколько параметров, доступных внешнему влиянию. Например, нужно установить такой тепловой режим в зернохранилище, управляя системой отопления и вентиляции, при котором будет обеспечена максимальная сохранность зерна, т. е. нужно *оптимизировать* процесс хранения. Этот процесс можно математически описать, получив оптимизационную математическую модель, использование которой позволит решить поставленную задачу. В противоположность этому, например, модель описания движения кометы нельзя превратить в оптимизационную, поскольку мы не располагаем возможностями вмешательства в этот процесс.

Многокритериальные модели. Часто приходится оптимизировать процесс по нескольким критериям одновременно, причем эти критерии могут быть противоречивыми. В этом случае строятся многокритериальные модели. Например, стоит задача: зная цены на продукты и потребность человека в пище, организовать питание больших групп людей (в армии, летнем детском лагере и др.) с удовлетворением всех потребностей организма, но, по возможности, дешево. Ясно, что эти цели противоречат друг другу, т. е. при моделировании будет учитываться несколько критериев, между которыми нужно искать баланс.

Система основных понятий

Моделирование и его разновидности		
Модель — упрощенное подобие объекта моделирования, отражающее его свойства, существенные с точки зрения цели моделирования		
Основные классы моделей: натурные и информационные		
Математические модели — разновидность информационных моделей. Математическая модель — описание объекта моделирования на языке математики		
Способы классификации математических моделей		
по отраслям наук	по математическому аппарату	по основной функции
Классификация математических моделей по функциональному подходу		
дескриптивные модели	оптимизационные модели	многокритериальные модели

Вопросы и задания

1. Что такое модель? В чем отличие натурной модели от информационной?
2. Охарактеризуйте основные виды информационных моделей.
3. Что такое математическая модель?
4. Какие существуют подходы к классификации математических моделей?
5. В чем состоит основная функция:
   а) дескриптивной модели;
   б) оптимизационной модели;
   в) многокритериальной модели?
6. Приведите примеры задач, решаемых с помощью математического моделирования.

3.1.2. Процесс разработки математической модели

В процессе разработки математической модели можно выделить четыре этапа.

Первый этап — **определение целей моделирования.** В зависимости от выбора целей для одного и того же объекта моделирования могут быть получены совершенно разные модели. Например, расчет режима запуска космического корабля к международной космической станции может исходить из таких разных целей, как доставка данным кораблем максимально возможного груза безотносительно стоимости запуска или согласие на разумное ограничение массы груза для достижения значительного снижения стоимости запуска. Во втором случае кроме физических факторов появляются экономические, и модели будут разными.

При моделировании могут определяться три вида **целей**:

1) модель нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект, какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром; основная цель — **понимание**;
2) модель нужна для того, чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях; основная цель — **управление**;
3) модель нужна для того, чтобы прогнозировать дальнейшее поведение объекта или последствия реализации воздействия на объект; основная цель — **прогнозирование**.

Примеры

1. Пусть объект исследования — сосуществующие популяции животных разных видов с общей кормовой базой. Простая математическая модель процесса межвидовой конкуренции помогает понять основные закономерности сосуществования животных. Однако человек часто берет на себя функции управления численностью популяций (в сельскохозяйственном производстве, в охотничьих хозяйствах и т. д.), и для моделирования процесса управления надо ввести в модель управляющие параметры, варьирование которыми позволит добиваться нужных целей. Кроме того, в этой же ситуации возможно поставить задачу долгосрочного прогнозирования судьбы популяций.
2. Объект исследования — состояние атмосферы (распределение температуры, влажности, давления, скорости ветра). Понимание того, как влияет изменение факторов на погоду, может быть задачей исследования. Управление погодой на больших территориях пока не во власти человека, но предсказание ее мы ждем каждый день; в наше время такие предсказания часто основаны на математическом моделировании процессов, происходящих в атмосфере.
3. Объект исследования — процесс завоза материалов и оборудования на крупную стройку. Нередко нарушение графиков завоза останавливает строительство, ведет к экономическим потерям. Учитывая, что возможности транспортников, пропуск-

ные способности дорог и иные ресурсы ограничены, составление оптимального графика завоза — дело вовсе не простое, и оно может быть объектом математического моделирования. В таком моделировании есть и цели управления, и цели предсказания (например, предсказание экономических потерь при том или ином срыве графика).

Второй этап — **составление списка параметров модели,** подразделение их на входные и выходные параметры, и расстановка параметров по уровню значимости с точки зрения достижения поставленных на первом этапе целей.

Обозначим множество **входных параметров** через $X = \{x_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Среди них могут быть как постоянные величины по отношению к исследуемому процессу, так и переменные. Примеры постоянных величин: мировые константы (например, гравитационная постоянная); не изменяющиеся в данном процессе свойства материала (теплопроводность, плотность) и т. п. Для каждой из переменных величин x_i надо указать возможный диапазон изменения значений: $a_i \leq x_i \leq b_i$ (очевидно, что для констант $a_i = b_i$).

Исходя из цели моделирования определяется список **выходных параметров** — результатов моделирования. Обозначим множество выходных параметров через $Y = \{y_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Важнейшим условием, часто залогом успеха моделирования, является правильное разделение входных параметров по степени важности влияния их изменений на выходные параметры, а также выбор первоочередных (с точки зрения достижения поставленной цели) выходных параметров. Такой процесс называется **ранжированием** (от слова «ранг», т. е. степень отличия). Чаще всего невозможно, да и не нужно, учитывать все факторы, которые могут повлиять на значения интересующих нас величин y_j. Выделить более важные (или, как говорят, значимые) факторы и отсеять менее важные может лишь человек, хорошо разбирающийся в той предметной области, к которой относится модель. Не следует стремиться учесть все факторы сразу, помня, что модель — упрощенное отражение реальности, а не сама реальность. Отбрасывание менее значимых факторов упрощает описание объекта моделирования и тем самым способствует лучшему пониманию его главных свойств и закономерностей.

Третий этап — **математическая формализация.** Определив наборы входных и выходных параметров, надо установить взаимосвязь между ними с помощью математических соотношений. Запишем указанную взаимосвязь в виде

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_k; x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

Данное выражение обозначает любую форму отношений между входными и выходными параметрами, выраженную в математическом виде. R может быть формулой, уравнением или системой уравнений, неравенством или системой неравенств и др. Отношение (1) является математическим выражением принципов и законов, действующих в исследуемой области: законов физики, экономики и пр.

Четвертый этап — **реализация математической модели.** Этот этап заключается в нахождении способа вычисления неизвестных **(выходных) параметров**, исходя из соотношения (1). Для этого используют как аналитические, так и численные методы. *Аналитические* методы позволяют выразить неизвестные величины через входные параметры в явном функциональном виде:

$$y_j = F_j(x_1, x_2, ..., x_n), (j = 1, 2, ..., k).$$

После этого по данным формулам можно выполнить любые вычисления для интересующих нас значений входных параметров, т. е. решить задачу моделирования. Если функция F достаточно сложная и требуется произвести большой перебор значений входных параметров, используется вычислительная техника.

В тех случаях, когда не удается получить аналитическое решение, применяются *численные методы* решения. Для их реализации с требуемой (обычно высокой) точностью необходимо применение компьютера. В компьютерном математическом моделировании численные методы преобладают. Причина заключается в более широких возможностях численных методов в решении математических задач по сравнению с аналитическими методами. Приведем примеры:

- алгебраические уравнения поддаются (в общем случае) аналитическому решению при степени не больше четвертой, а численному — в любом случае;
- трансцендентные уравнения, кроме простейших случаев, решаются лишь численно;
- задачи оптимизации, связанные с совместным решением большого числа уравнений и неравенств, в реальных ситуациях решаются только численно.

И все же, если существует возможность получить аналитическое решение задачи, исследователи обязательно ею воспользуются. Аналитическое решение обладает той общностью, которая, как правило, отсутствует у численного решения. Численное решение является частным решением задачи для заданного варианта значений входных параметров. Если требуется выявить общий характер зависимости результатов от изменения некоторых входных параметров, приходится производить многократные пересчеты решения задачи для разных значений x_i. Впрочем, высокое быстродействие современных компьютеров (и суперкомпьютеров!) позволяет производить такой анализ.

Система основных понятий

Процесс разработки математической модели			
Этапы математического моделирования			
Определение целей моделирования	*Составление списков параметров модели, ранжирование*	*Построение модели*	*Реализация модели*
Способы реализации			
аналитические		*численные*	

Вопросы и задания

1. Перечислите и кратко опишите этапы математического моделирования.
2. В чем основное различие входных и выходных параметров модели? Проиллюстрируйте на конкретных примерах.
3. Чем различаются аналитический и численный методы реализации математической модели?

3.1.3. Математическое моделирование и компьютеры

Первые компьютеры были созданы в середине XX века именно для решения задач математического моделирования, и на протяжении длительного периода эти задачи оставались основной областью применения компьютеров. К моменту создания компьютеров физика, механика, инженерное дело накопили большое количество математических моделей. Однако практически невозможным было их исследование методом «ручного» счета или применением примитивных вычислительных механизмов типа арифмометра. Создалась парадоксальная ситуация, когда потенциальные знания, выраженные в математических моделях, часто было невозможно реализовать на уровне числовых и графических результатов. Компьютеры в такой ситуации оказались бесценными помощниками.

Тем не менее математическое моделирование некоторого процесса или явления начинается, разумеется, не с компьютеров. Рассмотренные в предыдущем параграфе этапы: определение целей, выбор и ранжирование параметров, математическая формализация, выбор метода решения задачи и программирование для компьютера осуществляет человек. На этапе анализа и оценки полученных результатов моделирования вновь лишь человек (прежде всего постановщик задачи) является главным (часто — единственным) участником процесса. Основное преимущество компьютера перед человеком — высокая скорость вычислений. Именно это качество делает компьютер незаменимым инструментом в информационном моделировании на этапе численного решения задачи и представления результатов.

Как уже отмечалось, в компьютерном математическом моделировании доминируют численные методы. Тем не менее понятия «аналитическое решение» и «численное решение» отнюдь не противостоят друг другу, так как:

а) все чаще компьютеры при математическом моделировании используются не только для численных расчетов, но и для аналитических преобразований путем применения *компьютерных систем аналитических вычислений*;

б) аналитическое представление математической модели часто выражается столь сложными формулами, что при взгляде на них не складывается понимание описываемого процесса. Эти формулы надо протабулировать, представить графически, проиллюстрировать в динамике, иногда даже озвучить, т. е. проделать то, что называется «визуализацией абстракций». Для этих целей компьютер — универсальный инструмент.

Компьютерная реализация моделирования сопровождается разработкой алгоритма и составлением программы для компьютера. Если же существует готовая и сертифицированная программа нужного типа, то можно ею воспользоваться. Для этого в Информационно-библиотечном фонде Российской Федерации существуют *отраслевые фонды алгоритмов и программ*.

Еще одним средством компьютерного моделирования являются *пакеты прикладных программ* (ППП). *ППП — это специальным образом организованные программные комплексы, рассчитанные на применение в определенной предметной области и дополненные соответствующей технической документацией*. В зависимости от содержания решаемых задач различают: пакеты для решения типовых инженерных, планово-экономических, общенаучных задач; пакеты системных программ; пакеты для обеспечения систем автоматизированного проектирования и систем автоматизации научных исследований и др. Пакеты прикладных программ ориентированы на непрограммирующего пользователя и поддерживают понятный для специалиста интерфейс.

Для графической обработки результатов моделирования используются специальные графические средства — *пакеты научной и инженерной графики*, реализующие в том числе и анимацию, и трехмерное (3D) представление.

Для компьютерной реализации не очень сложных математических моделей годятся и такие универсальные прикладные средства выполнения вычислений, как электронные таблицы (например, Microsoft Excel, OpenOffice.org Calc), универсальные математические пакеты (например, Mathcad, Maple), которые объединяют средства вычислений и графической обработки результатов.

И все-таки самым универсальным и «гибким» способом реализации на компьютере математического моделирования является программирование на универсальных языках. Такой подход позволяет исследователю вносить любые изменения в математическую модель, численный метод ее реализации, управлять точностью получаемых результатов, оптимизировать время вычислений.

Заметим, что большинство профессионалов, занимающихся моделированием в физике и инженерном деле, предпочитают современные версии Фортрана — исторически первого языка программирования высокого уровня, пережившего множество других языков. Причины — богатство библиотек прикладных программ и непревзойденная эффективность трансляторов при решении математических задач.

Программирование заключается в *построении алгоритма*, *составлении программы* на используемом языке и *отладке программы*. На этапе составления программы программисту помогает избавиться от ошибок, связанных с нарушением грамматики языка программирования, раздел транслятора, который называется синтаксическим анализатором. На этапе отладки программы выявляются содержащиеся в ней алгоритмические ошибки. Для того чтобы быть уверенным, что алгоритм и построенная на его основе программа не содержат ошибок, программу надо проверить на простейших тестовых задачах (желательно, с заранее известным ответом). Такие тестовые задачи формулируются на базе исходной модели при некоторых частных наборах значений параметров, для которых существует аналитическое решение, путем сопоставления результатов расчета и результатов, следующих из аналитического решения.

Затем следует собственно *вычислительный эксперимент* и выясняется, соответствует ли модель реальному объекту (процессу). Модель адекватна реальному процессу, если характеристики процесса, полученные на компьютере, с заданной степенью точности совпадают с результатами наблюдений за объектом моделирования. В случае несоответствия модели реальному процессу следует уточнять модель.

Анализ адекватности модели — сложная проблема, требующая участия прежде всего постановщика задачи и специалистов из той предметной области, к которой относится модель. Если опытный специалист, не вникая в математическую и компьютерную процедуры, анализируя результаты, делает вывод, что «такого не может быть в принципе», то в 99% случаев это означает ошибку на каком-то этапе моделирования. Однако в 1% случаев такое обстоятельство может означать открытие — преодоление уровня существующих знаний.

Моделирование динамических процессов (общая методика)

Динамический процесс — изменение состояния системы со временем. Например, это может быть изменение координат движущегося тела в пространстве, изменение температуры тела, изменение численности вида каких-нибудь живых организмов и пр.

Обозначим через F рассматриваемую характеристику системы (координату, температуру, численность...). Зависимость этой характеристики от времени — $F(t)$. Чаще всего эта зависимость носит непрерывный характер, а на графике представляется гладкой кривой (рис. 3.1, *а*).

Функция $F(t)$ является непрерывной математической моделью исследуемого процесса. Такую модель можно назвать функциональной математической моделью. Если эту функцию можно представить формулой, содержащей некоторый набор «привычных» функций (на школьном уровне «привычные» — это элементарные функции и их суперпозиции), то модель можно назвать аналитической. Примеры аналитических функциональных моделей:

$F(t) = at + b$ — линейная функциональная модель;

$F(t) = at^2 + bt + c$ — квадратичная функциональная модель;

$F(t) = ae^{b(t)}$ — экспоненциальная функциональная модель.

Аналитическая функциональная зависимость удобна тем, что по соответствующей формуле для любого значения t из области определения функции F можно вычислить значение функции.

В тех случаях, когда при изучении динамического процесса не удается получить аналитически выраженную функциональную зависимость, применяют численные методы математического моделирования. При использовании численных методов искомые зависимости получают в виде числовых таблиц, связывающих конечное множество дискретных значений аргумента t и функции F:

t	t_0	t_1	...	t_n
F	F_0	F_1	...	F_n

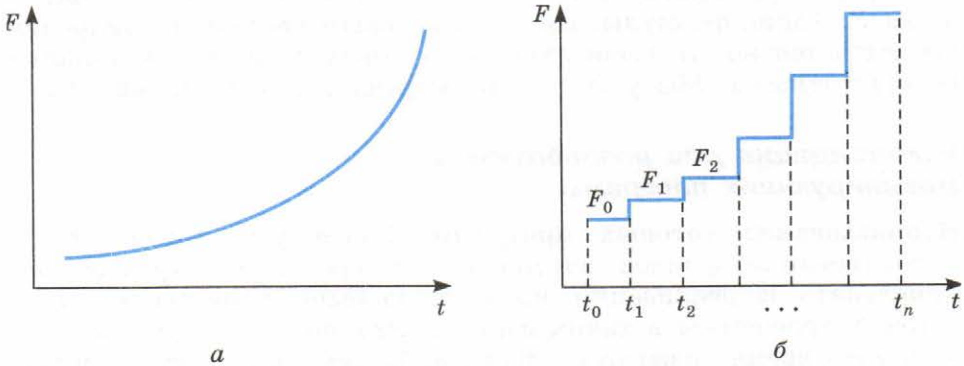


Рис. 3.1. Графики непрерывной (*а*) и дискретной (*б*) моделей

Численное моделирование динамических процессов происходит следующим образом.

1. Производится дискретизация времени: исследуемый промежуток времени разбивается на конечное число отрезков (интервалов времени) точками на оси t: t_0, t_1, t_2, ..., t_n (рис. 3.1, *б*). Расстояние между двумя точками называется шагом дискретизации по времени:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i.$$

В общем случае шаги могут быть различными, т. е. изменяться с изменением номера i. Если используется постоянный шаг Δt, то будут справедливыми равенства:

$$t_i = t_0 + i\Delta t, \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t.$$

2. Принимается допущение, что в пределах временнóго шага значение величины F не изменяется: $F(t) = F_i$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. В момент времени t_{i+1} значение величины F меняется скачком с F_i на F_{i+1} (см. рис. 3.1, *б*). Это допущение, не являясь единственно возможным, является самым простым, и мы будем его придерживаться.

3. Скорость изменения величины F оценивается отношением

$$V_i = (F_{i+1} - F_i)/\Delta t.$$

Отсюда следует равенство:

$$F_{i+1} = F_i + V_i\Delta t. \qquad (3.1)$$

Если есть какие-то физические или другие способы определения скорости V на каждом временно́м шаге (в зависимости от предметной области решаемой задачи), то, используя полученную формулу, можно шаг за шагом вычислять значения величины F. Такие формулы, согласно которым следующие значения последовательности вычисляются по предыдущим, называются *рекуррентными*. Мы уже с ними встречались в параграфе 2.2.7.

Рекомендации для разработчиков моделирующих программ

Использование готовых программ. Ранее уже говорилось о существовании фондов алгоритмов и программ. Прежде чем приступать к реализации проекта, полезно произвести поиск готовой программы в таких фондах. Это может значительно сэкономить время разработки проекта. Кроме того, следует внимательно изучить стандартные библиотеки и модули, прилагаемые к используемой системе программирования. Там можно найти уже реализованные процедуры для интересующих вас численных методов.

Наглядность пользовательского интерфейса. Работа пользователя с программой должна поддерживаться наглядным и понятным интерфейсом. Запрос исходных данных, вывод сообщений в процессе решения задачи должны происходить в диалоговом режиме. Для этих целей наиболее удобным является использование графического интерфейса, разработку которого упрощают средства визуального программирования, дополняющие универсальные языки программирования (Delphi, Visual Basic, Visual Fortran и др.). Однако если использование визуальных сред программирования существенно увеличивает время исполнения программы, то при расчетах в режиме реального времени, возможно, придется отказаться от «красивого» интерфейса.

Обеспечение требуемой точности результатов. Результаты математического моделирования теряют смысл, если нельзя оценить их погрешность. При использовании численных методов погрешность результата зависит от шага дискретизации переменных величин (времени, координаты и др.). С уменьшением шага уменьшается погрешность вычислений, поэтому расчеты обычно производятся не для единственного значения шага, а для последовательности уменьшающихся шагов. Например, при вычислении величины F с разным шагом по времени (Δt) получены следующие результаты:

$$F(\Delta t = 0{,}1) = 5{,}321467; \qquad F(\Delta t = 0{,}01) = 5{,}3425671;$$

$$F(\Delta t = 0{,}001) = 5{,}3425392; \qquad F(\Delta t = 0{,}0001) = 5{,}3425396.$$

По двум последним результатам видно, что произошло установление семи значащих цифр. Отсюда есть основание считать, что значение $F = 5{,}342539$ содержит только верные цифры.

Использование внешней памяти. Для хранения больших массивов данных следует использовать файлы. Например, пусть при расчете распределения температуры в некоторой области на сетке размером 100 × 100 ячеек получается 10 000 чисел. Нет смысла выводить их на экран. Для сохранения и дальнейшей обработки (например, графической) их следует записать в файл на диск. На экран можно вывести либо какую-то часть из этих значений, либо интегральные характеристики: среднее значение, наибольшее и наименьшее значения и т. п.

Графическая иллюстрация результатов моделирования. Человеческое восприятие так устроено, что графически представленная информация, как правило, воспринимается значительно эффективнее, больше говорит о качестве процесса, чем числовая. При исследовании зависимостей между величинами графики, разного рода диаграммы (столбчатые и круговые) чрезвычайно полезны. Графическая обработка результатов расчетов может осуществляться как штатными графическими средствами используемой системы программирования (см. параграф 2.4.5), так и специализированными программами научной графики. Примером такой программы является Grapher.

Для наглядного представления пространственного распределения величин удобно использовать картину изолиний — линий постоянного значения величины. Такой прием вам знаком по картам погоды, где изображаются линии постоянной температуры — изотермы (рис. 3.2) или линии постоянного давления — изобары.

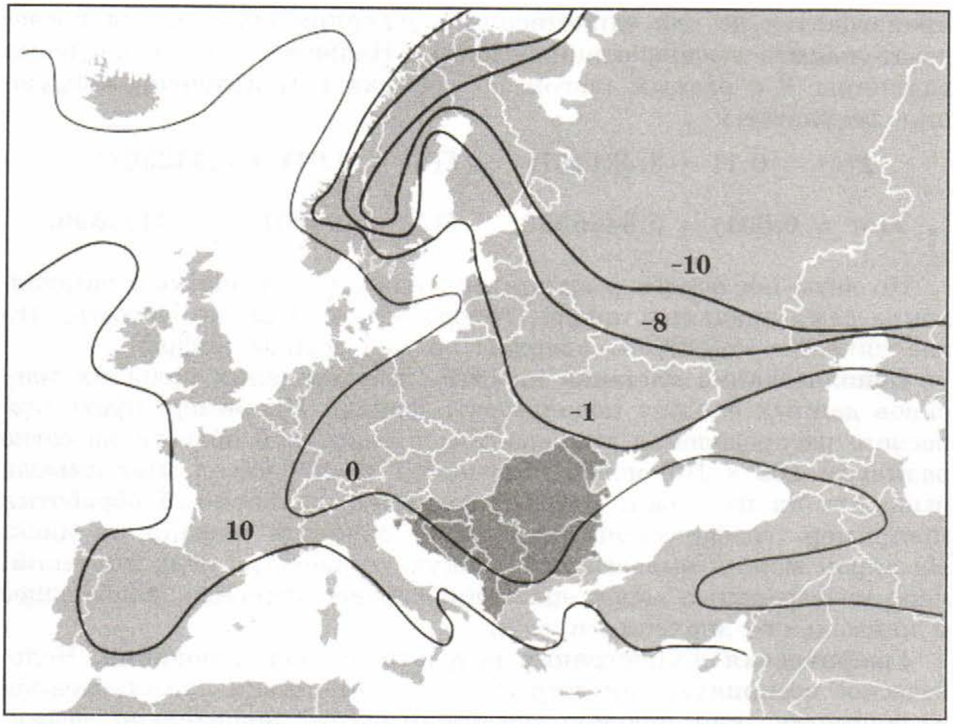


Рис. 3.1. Изотермы среднегодовой температуры в Европе (из «Википедии»)

Система основных понятий

Математическое моделирование и компьютеры	
Программные средства компьютерного моделирования	
Универсальные языки и системы программирования	Фонды алгоритмов и программы. Специализированные пакеты прикладных программ
Моделирование динамических процессов	
Аналитический метод	Численный (дискретный) метод
На основании аналитических зависимостей табулирование и графическая обработка результатов	Табличное представление результатов путем пошагового вычисления по рекуррентным формулам. Возможна графическая обработка

Рекомендации по разработке моделирующих программ				
Использовать готовые программные модули	Конструировать диалоговый пользовательский интерфейс	Обеспечивать требуемую точность результатов	Для хранения больших объемов данных использовать внешнюю память	Осуществлять графическую обработку результатов моделирования средствами научной графики

Вопросы и задания

1. Почему использование компьютеров критически важно для решения большинства задач математического моделирования?
2. Какие разновидности программного обеспечения используются в компьютерном математическом моделировании?
3. Что такое тестовая задача? Как создаются тестовые задачи при компьютерном математическом моделировании?
4. Что такое динамический процесс? Какие существуют методы моделирования динамических процессов?
5. Как можно увеличить точность результата моделирования, полученного по численному методу?
6. Как рекомендуется поступать с результатами расчетов, представляющих собой очень большие числовые массивы?
7. Придумайте примеры возможного использования научной графики, отличные от приведенных в тексте данного параграфа.

3.2. Моделирование движения в поле силы тяжести


Исаак Ньютон (1643–1727)

За всю историю науки наибольший опыт в математическом моделировании имеет физика. Одним из самых выдающихся ученых в мировой истории был Исаак Ньютон. В 1687 году вышел его труд «Математические начала натуральной философии». В современном понимании «натуральная философия» — это физика. В этой работе были описаны открытые ученым законы механики (три закона Ньютона) и закон всемирного тяготения. Законы описывались в математической форме, т. е. в виде математических моделей физических явлений: механического движения и гравитации. В этот же период Ньютон создает основы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление. В работах Ньютона и его последователей этот математический аппарат находит широкое применение в физике. Помимо аналитических методов, Ньютон разрабатывает численные методы решения многих математических задач.

И после Ньютона развитие математической науки происходило во многом под влиянием физики. Новые физические проблемы порождали новые математические теории и методы, новые математические модели.

3.2.1. Математическая модель свободного падения тела

Рассмотрим одну из традиционных задач классической механики: движение тела в поле силы тяжести. Эта задача имеет множество приложений: от расчета свободного падения тела на Землю до запуска баллистической ракеты или космического корабля.

Изучение даже, казалось бы, простейшего варианта задачи — свободного вертикального падения на Землю — позволяет получить ответы на множество интересных и важных вопросов: с какой скоростью падают на землю капли дождя; какой скорости и температуры достигает метеорит, падающий на Землю; каким должен быть размер парашюта для безопасного приземления парашютиста и др. Ответить на все эти вопросы позволяет адекватная математическая модель свободного падения тела в поле силы тяжести в атмосфере Земли.

Определяющими факторами, влияющими на механическое движение тела, являются действующие на него силы. Согласно второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

где m — масса тела, $\vec{a}$ — его ускорение, $\vec{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на тело. При моделировании механического движения в первую очередь решается вопрос о том, какие силы действуют на тело, какие из них необходимо учитывать в модели, а какими можно пренебречь.

На свободно движущееся в поле силы тяжести тело в газовой или жидкой среде действуют три силы: сила тяжести ($m\vec{g}$), направленная вертикально вниз; архимедова сила ($\vec{F}_A$), направленная вертикально вверх; сила сопротивления движению ($\vec{F}_c$), направленная в противоположную сторону относительно направления движения. При вертикальном свободном падении направление сил показано на рис. 3.3.

Какие из этих сил следует учесть в модели, а какими можно пренебречь, зависит от физических условий процесса. Основной из этих трех сил является сила тяжести. Ею пренебрегать нельзя. Возможность пренебречь другими силами зависит от того, насколько они меньше силы тяжести.

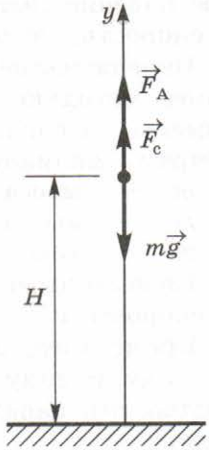


Рис. 3.3. Направление сил

Архимедова сила во столько раз меньше силы тяжести, во сколько раз плотность среды (газа или жидкости) меньше средней плотности тела. Например, если тело — сплошной стальной шар с плотностью 7800 кг/м^3, который падает в атмосферном воздухе, средняя плотность которого вблизи Земли равна 1,29 кг/м^3, то архимедова сила примерно в 6000 раз меньше силы тяжести и ею можно пренебречь. Если же падение происходит в воде, плотность которой в 7,8 раза меньше плотности железа, то пренебрежение архимедовой силой может заметно сказаться на точности результата.

Сила сопротивления среды не является постоянной величиной. Она зависит от скорости движения тела: чем скорость выше, тем больше сопротивление. Кроме того, сила сопротивления зависит от плотности среды и ее вязкости. Качественно можно рассуждать так: если движение происходит в газе, плотность которого много меньше плотности тела, вязкость невелика и высота падения небольшая (тело не успеет набрать большую скорость), то силой сопротивления можно пренебречь. Противоположный пример: падение метеорита на Землю, который оплавляется или полностью сгорает в атмосфере из-за большой силы трения о воздух.

Для расчета вертикального падения тела направим ось Y так, как показано на рис. 3.3. Движение происходит вдоль этой оси. Запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_c \,. \tag{3.2}$$

Проектируя данное векторное уравнение на ось Y и выражая ускорение, получим:

$$a = \frac{F_A + F_c - mg}{m} \,. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) — это математическое выражение закона движения. Теперь сформулируем условие задачи.

Условие задачи: на высоте H над поверхностью Земли находится тело массой m. В момент времени $t = 0$ начинается свободное падение тела на Землю. Требуется определить время падения и скорость, которую будет иметь тело в момент удара о Землю.

Первоначальная координата тела: $y = H$. Согласно описанной ранее методике математического моделирования, определим параметры исследуемого процесса. Неизменными входными параметрами являются:

m — масса тела;
H — высота, с которой начинается падение тела;
g — ускорение свободного падения.

Переменными параметрами являются время t, координата y и скорость v.

Кроме того, существуют параметры, влияющие на архимедову силу и силу сопротивления. Это плотность среды (газа или жидкости), параметр вязкости среды, размер и форма падающего тела.

Свободное падение без учета сил противодействия

Рассмотрим сначала простейшее приближение задачи: сила сопротивления и архимедова сила пренебрежимо малы по сравнению с силой тяжести. Такое предположение можно принять, если плотность тела много больше плотности среды, а размер тела мал и падение происходит с небольшой высоты. *Пример*: падение в воздухе свинцового шарика.

В уравнении (3.3) принимаем $F_A = 0$, $F_c = 0$. Выразив ускорение, получаем:

$$a = -g.$$

Движение равноускоренное, величина ускорения равна ускорению свободного падения. Знак «минус» связан с тем, что направление оси Y выбрано вверх, а вектор $\vec{g}$ направлен вниз. Из формул кинематики равноускоренного движения следует:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad (3.4)$$

$$v = v_0 + at. \quad (3.5)$$

Здесь s — путь, пройденный за время t; v_0 — начальная скорость.

Учитывая, что $v_0 = 0$, $a = -g$ и $y = H$ при $t = 0$, из формул (3.4) и (3.5) получаем:

$$y = H - \frac{gt^2}{2}; \quad (3.6)$$

$$v = -gt. \quad (3.7)$$

Формулы (3.6)–(3.7) представляют собой математическую модель, описывающую процесс свободного падения тела без учета сил противодействия. Они представлены в аналитическом виде: зависимость $y(t)$ — квадратичная функция, зависимость $v(t)$ — линейная функция. Их графики показаны на рис. 3.4 (для скорости представлено значение абсолютной величины).

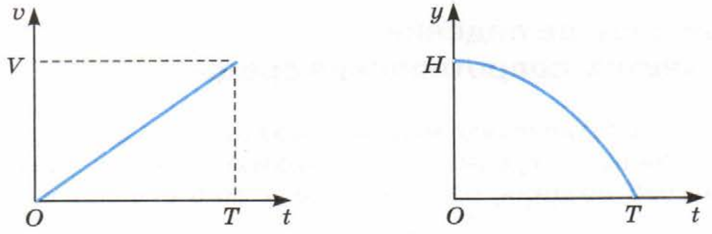


Рис. 3.4. Изменение со временем абсолютной величины скорости и координаты в случае падения тела без сопротивления среды

Исходя из этой модели можно получить ответы на любые вопросы, связанные с данным движением, например какую скорость и координату (высоту над землей) будет иметь тело через 1 секунду после начала падения. Можно получить ответ и на вопрос, поставленный в условии задачи: через сколько времени и с какой скоростью тело упадет на землю? Для этого сначала нужно вычислить время падения из уравнения (3.6) при условии $y = 0$. Обозначим это время буквой T. Получим:

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Абсолютная величина скорости в момент падения будет равна $V = gT$. Например, если $H = 10$ м, то

$$T = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9{,}8}} \approx 1{,}43 \text{ с}, \quad V \approx 14{,}01 \text{ м/с}.$$

Вопросы и задания

1. Какие силы действуют на свободно падающее тело? Какими из них и в каких ситуациях можно пренебречь?
2. Запишите формулы, составляющие математическую модель свободного падения.
3. Влияют ли размер, форма и масса тела на его движение при свободном падении в пустоте? Объясните ответ.

4. Запишите математическую модель движения тела, если в начальный момент времени оно было брошено в вертикальном направлении со скоростью v. Рассмотрите два варианта: скорость направлена вверх; скорость направлена вниз.
5. Получите формулу для вычисления времени движения до падения на Землю при условии предыдущей задачи.

3.2.2. Свободное падение с учетом сопротивления среды

Получим математическую модель свободного падения тела с учетом сопротивления среды. Силой Архимеда будем пренебрегать, допуская, что средняя плотность тела много больше плотности среды.

При движениях тел в газовой или жидкостной среде сопротивление среды оказывает сильное влияние на характер движения. Очевидно, что предмет, падающий с большой высоты (например, парашютист, прыгнувший с самолета), вовсе не движется равноускоренно, так как по мере роста скорости возрастает и сила сопротивления воздуха. После того как сила сопротивления сравняется с силой тяжести, движение становится равномерным, согласно первому закону Ньютона.

Закономерности, связывающие силу сопротивления со скоростью движения тела, носят эмпирический характер. Есть два механизма сопротивления среды: «лобовое» сопротивление и вязкое трение. При малых скоростях преобладает вязкое трение жидкости или газа о поверхность тела. С ростом скорости возрастает влияние лобового сопротивления, которое зависит от поперечного сечения тела (парусный эффект). Исследования показывают, что при малых скоростях величина силы сопротивления пропорциональна скорости, а далее с ростом скорости возрастает пропорционально ее квадрату.

Сформулированная закономерность представляется следующей формулой:

$$F_c = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v^2,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности, имеющие соответственно размерности $[k_1] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, $[k_2] = \frac{\text{м} \cdot c^2}{\text{м}^2}$. Заметим, что эти размерности различны, т. е. значения k_1 и k_2 бессмысленно сравнивать между собой по величине. Указанная эмпирическая зависимость силы сопротивления от скорости выполняется до скоростей, не превышающих скорости звука в данной среде.

С учетом силы сопротивления из уравнения второго закона Ньютона в проекции на ось Y выразим ускорение (см. формулу (3.3) в параграфе 3.2.1):

$$a(t) = \frac{F_c(t) - mg}{m} = \frac{k_1 v(t) + k_2 v(t)^2 - mg}{m}. \tag{3.8}$$

Ускорение зависит от времени, поэтому (как уже было сказано выше) движение не равноускоренное.

Для решения полученной задачи используем численный подход к моделированию динамического процесса, о котором говорилось в параграфе 3.1.2.

Пусть Δt — малый шаг изменения времени. Получим формулу, по которой будем вычислять величину скорости. Допускаем, что скорость и ускорение движения на каждом шаге по времени не изменяются, а при переходе к следующему шагу изменяются скачком. Поскольку ускорение есть скорость изменения скорости, имеем:

$$a_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}.$$

Здесь v_i и a_i — соответственно скорость и ускорение на i-м шаге по времени. Отсюда:

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t.$$

Ускорение выразим из формулы (3.8). Поскольку $a_i = a(t_i)$, получим:

$$v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m} \Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.9}$$

За время Δt на i-м шаге тело перемещается на расстояние $v_{i\Delta} t$. Следовательно, координата y тела будет принимать значения:

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.10}$$

По условию задачи, падение происходит с высоты H с нулевой начальной скоростью, поэтому при $t = 0$ выполняются условия, которые называются *начальными условиями*:

$$v(0) = v_0 = 0; \qquad y(0) = y_0 = H. \tag{3.11}$$

Рекуррентные формулы (3.9), (3.10) и начальные значения (3.11) составляют математическую модель свободного падения тела с учетом сопротивления среды. В отличие от аналитической модели (3.6)–(3.7) для свободного падения в пустоте, формулы (3.9)–(3.11) представляют численную (дискретную) модель.

Предельная скорость свободного падения

Заметим, что качественно описать характер зависимости скорости от времени можно и не прибегая к расчетам по математической модели (3.9)–(3.11). Как уже говорилось выше, по мере нарастания скорости падения возрастает сила сопротивления, что будет вести к уменьшению разницы между ней и силой тяжести. Когда эти силы сравняются ($F_c = mg$), скорость движения выйдет на постоянное предельное значение. Сказанное качественно проиллюстрировано на рис. 3.5. Предельное значение скорости несложно найти, решив квадратное уравнение $k_1 v + k_2 v^2 - mg = 0$:

$$v^* = -\sqrt{\left(\frac{k_1}{2k_2}\right)^2 + \frac{mg}{k_2}} - \frac{k_1}{2k_2}.$$

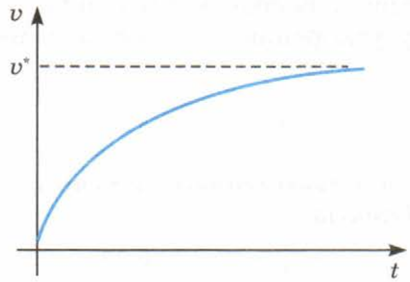


Рис. 3.5. Качественная иллюстрация зависимости скорости от времени при свободном падении с наличием сопротивления среды

Для нахождения численной зависимости $y(t)$, для определения времени, когда установится предельная скорость, и для выяснения, произойдет ли это установление до столкновения с Землей, требуется произвести расчеты по математической модели (3.9)–(3.11).

Параметры модели с учетом сопротивления среды

Для получения полного списка входных параметров модели рассмотрим величины k_1 и k_2, входящие в формулу (3.8). Выясним, как определяются их численные значения в конкретных ситуациях. В учебниках механики можно найти следующие данные.

Величина k_1 пропорциональна так называемой динамической вязкости среды (обозначаемой μ) и размеру тела. В общем виде формула для k_1 имеет следующий вид: $k_1 = c_1 \mu b$, где безразмерная константа c_1 определяется формой тела, b — характерный размер тела в направлении, перпендикулярном потоку обтекающего газа или жидкости. Для тела сферической формы (шарика радиуса r) используется следующая формула: $k_1 = 6\pi\mu r$.

О величине k_2 известно следующее: она пропорциональна площади поперечного по отношению к потоку сечения тела σ, плотности среды ρ, и зависит от формы тела. Обычно представляют $k_2 = \frac{1}{2}c_2\sigma\rho$, где c_2 — безразмерный коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела; в частности, для шара $c_2 = 0{,}4$, для диска, плоскость которого перпендикулярна потоку, $c_2 = 1{,}1$, для полусферы, обращенной сферической стороной к потоку, $c_2 = 0{,}55$ (рис. 3.6).

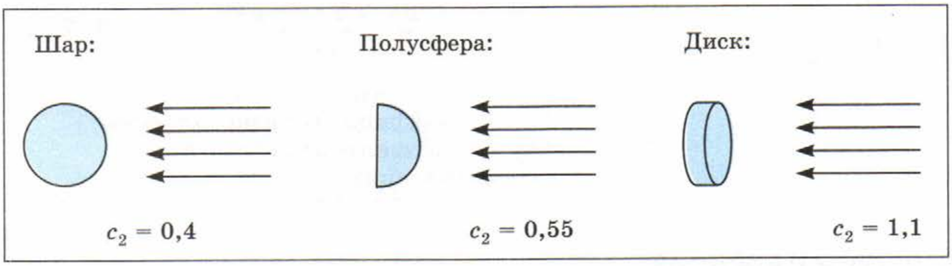


Рис. 3.6. Коэффициент лобового сопротивления (стрелки — направление потока обтекающего газа или жидкости)

Таким образом, полный набор входных параметров модели включает следующие величины:

- массу тела m;
- начальную высоту H;
- динамическую вязкость среды μ;
- плотность среды ρ;
- начальную скорость движения тела v_0;
- характерный размер тела b в направлении, перпендикулярном потоку (он определяет величину σ, входящую в k_2);
- параметры c_1 и c_2, отражающие форму тела.

Результатом моделирования являются зависимости $v(t)$ и $y(t)$, получаемые в дискретном (табличном) виде согласно математической модели (3.9)–(3.11).

Система основных понятий

Модель свободного падения тела	
Физический закон в основе модели: второй закон Ньютона	
Без учета силы сопротивления (в пустоте)	**С учетом силы сопротивления**
$a = -g$	$a(t) = \dfrac{k_1 v(t) + k_2 v(t)^2 - mg}{m}$
Аналитическая модель падения с высоты H: $y = H - \dfrac{gt^2}{2}$; $v = -gt$	Численная модель падения с высоты H: $v_0 = 0$; $y_0 = H$. $v_{i+1} = v_i + \dfrac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m}\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ $y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ k_1 — коэффициент вязкого трения; k_2 — коэффициент лобового сопротивления

Вопросы и задания

1. Из каких составляющих складывается сила сопротивления движению в сплошной среде?
2. Определите, при какой скорости падения в воздухе железного шара радиусом 10 см сравняются силы вязкого трения и лобового сопротивления.
3. Определите максимальную скорость падения железного шара радиусом 10 см в воде ($\mu = 1{,}002$ н·с·м$^{-2}$, $\rho = 1 \cdot 103$ кг/м^3) и в глицерине ($\mu = 1480$ н·с·м$^{-2}$, $\rho = 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м^3).
4. Постройте численную модель падения твердого шара в воде с учетом архимедовой силы.
5. Постройте модель падения тела в атмосфере с учетом изменения плотности воздуха с высотой.
6. Постройте модель падения кометы (лед плавится — комета тает).

3.2.3. Компьютерное моделирование свободного падения

Из курса физики вы знаете, что такое физический эксперимент. Физический эксперимент может проводиться либо в естественных (природных) условиях, либо в физической лаборатории. В лабораторном эксперименте создается установка, на которой воспроизводится изучаемый процесс. Измерения проводятся с помощью приборов. Например, для сравнения свободного падения тела в пустоте, в воздухе и в воде можно собрать экспериментальную установку, показанную на рис. 3.7. Берутся три вертикальных цилиндра одинаковой высоты из прозрачного материала. В первом с помощью насосов создается вакуум, второй наполнен воздухом при нормальном атмосферном давлении, в третьем — вода. Во всех трех цилиндрах одновременно начинают падать три одинаковых металлических шара. Эксперимент можно снимать с помощью видеокамеры. Затем в замедленном темпе наблюдать за «соревнованием» трех шаров, за изменением их скоростей. Можно определить разницу во времени между падением в пустоте, в воздухе и в воде.

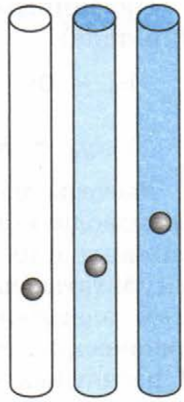


Рис. 3.7. Физический эксперимент

Для изучения того же процесса можно использовать и другой метод, который называется вычислительным экспериментом. Для этого нужно иметь математическую модель процесса свободного падения и компьютер. Математическая модель нами была получена раньше, а компьютер всегда в нашем распоряжении. Сформулируем постановку задачи для вычислительного эксперимента.

Задача 1. Сопоставить процессы падения твердого шара радиуса r с одной и той же высоты в разных средах: в пустоте (без сопротивления), в атмосферном воздухе и в воде.

С учетом сферической формы тела имеем (см. параграф 3.2.2):

$$k_1 = 6\pi\mu\, r; \quad k_2 = \frac{1}{2}c_2\sigma\rho = \frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot\pi\cdot r^2\rho_c = 0,2\pi r^2\rho_c; \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{жел}}.$$

В физическом справочнике находим значения параметров для всех участвующих в расчете веществ (все величины представлены в системе СИ):

Среда	μ — динамическая вязкость	ρ — плотность
Железо		7800 кг/м^3
Воздух (при 20 °C и 1 атм.)	0,0182 н·с·м$^{-2}$	1,29 кг/м^3
Вода (при 20 °C)	1,002 н·с·м$^{-2}$	1·10^3 кг/м^3

Перепишем еще раз математическую модель свободного падения тела:

$$v_0 = 0; \quad v_{i+1} = v_i + \frac{k_1 v_i + k_2 v_i^2 - mg}{m} \Delta t, \; i = 0, 1, 2, \ldots \quad (3.12)$$

$$y_0 = H; \quad y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \quad (3.13)$$

Расчеты изменения скорости и координаты со временем можно производить по формулам (3.12)–(3.13), используя электронные таблицы или языки программирования. В таблице 3.1 показаны результаты вычислительного эксперимента, проведенного с помощью электронной таблицы. Обратите внимание на то, что все физические параметры задачи размещены в ячейках таблицы. В расчетных формулах указываются абсолютные ссылки на эти ячейки. Например, формула в ячейке E20, где вычисляется значение v_1 в воздухе, выглядит так:

=E19+($G$10*E19+$G$11*E19^2–$G$9*$I$5)*$D$15/$G$9.

Здесь $G$10 — адрес k_1, $G$11 — адрес k_2 и т. д. В ячейке F20 находится формула для вычисления y_1: =F19+E19*$D$15. Здесь $D$15 — адрес Δt.

Проанализируем полученные результаты. Рассчитывалось падение с высоты 10 метров. Вычисления производились с шагом по времени $\Delta t = 0{,}1$. Расчеты скорости и координаты в пустоте (без сопротивления) выполнялись по точным формулам (3.6), (3.7). Выполняя вычисления с дискретным шагом по времени, нельзя точно зафиксировать момент падения на Землю. Определить его можно с точностью величины шага. Отрицательные значения координаты в таблице обозначают, что на последнем временно́м интервале произошло приземление.

Приземление в пустоте и в воздухе произошло в интервале времени от 1,4 до 1,5 с. Более точное значение без учета сопротивления было вычислено раньше: $T = 1{,}43$ с. Нам также известно более точное значение конечной скорости: $V \approx 14{,}01$ м/с. График движения в воздухе мало отличается от движения в пустоте. Следует иметь в виду, что разница результатов связана не только с учетом сопротивления воздуха, которое здесь невелико, но и с погрешностью приближенного численного метода расчета движения в воздухе. Уменьшить эту погрешность можно путем уменьшения шага по времени Δt.

Гораздо более заметно отличие процесса падения тела в воде от падения в пустоте или воздухе. На рисунке 3.8 показаны графики изменения высоты тела со временем. Жирная линия соответствует движению в воде, а более тонкая линия — движению в воздухе. Приземление в воде произошло примерно на 0,8 с позже, чем в воздухе.

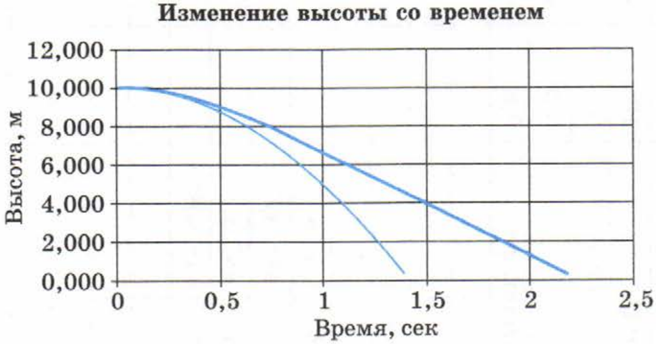


Рис. 3.8. Зависимость высоты тела от времени при падении в воде и в воздухе (жирная линия — в воде, тонкая — в воздухе)

На рисунке 3.9 приведены графики зависимости величины скорости падения от времени. Скорость падения в воздухе остается практически линейной. А скорость падения в воде примерно через 1 секунду выходит на постоянное значение. Это значение приблизительно равно 5,36 м/с.

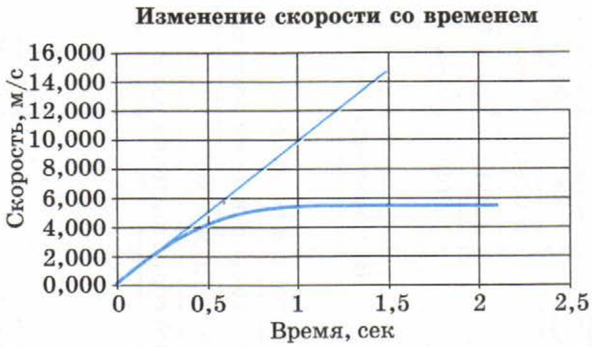


Рис. 3.9. Изменение величины скорости падения со временем (жирная линия — в воде, тонкая — в воздухе)

Здесь мы опять имеем возможность сравнить численный результат с более точным значением. В параграфе 3.2.2 аналитическим способом была получена формула для предельной скорости падения. Подставим в нее все параметры, соответствующие движению в воде. Получим:

$$v^* = -\sqrt{\left(\frac{k_1}{2k_2}\right)^2 + \frac{mg}{k_2}} - \frac{k_1}{2k_2} \approx -5{,}35731 \text{ м/с}.$$

Таблица 3.1

Вычислительный эксперимент со свободным падением тела

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			**Параметры модели (константы)**							
2	Плотность шара: $\rho_{жел=}$			7800	кг/м^3	Начальная высота: H=			10	м
3	Плотность воздуха: $\rho_{воз=}$			1,29	кг/м^3	Начальная скорость: V0=			0	м/с
4	Вязкость воздуха: $\mu_{воз=}$			0,0182	н·с·м$^{-2}$	Радиус шара: r=			0,05	м
5	Плотность воды: $\rho_{воды=}$			1000	кг/м^3	Ускорение св. падения: g=			9,8	м/с^2
6	Вязкость воды: $\mu_{воды=}$			1,002	н·с·м$^{-2}$					
7										
8			Вычисляемые параметры модели:							
9	Масса шара:					m=	4,08407	кг		
10	Коэффициент вязкого трения воздуха:					K1=	0,017153	н·с/м		
11	Коэффициент лобового сопротивления воздуха:					K2=	0,002026	н(с/м)^2		
12	Коэффициент вязкого трения воды:					K1=	0,944363	н·с/м		
13	Коэффициент лобового сопротивления воды:					K2=	1,570796	н(с/м)^2		
14										
15	Шаг по времени: Δ t=			0,1	с					
16										
17			В пустоте		В воздухе		В воде			
18	i	ti	vi	yi	vi	yi	vi	yi		
19	0	0	0,000	10,000	0,000	10,000	0,000	10,000		
20	1	0,1	–0,980	9,951	–0,980	10,000	–0,980	10,000		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21	2	0,2	–1,960	9,804	–1,960	9,902	–1,946	9,902		
22	3	0,3	–2,940	9,559	–2,941	9,706	–2,825	9,707		
23	4	0,4	–3,920	9,216	–3,922	9,412	–3,563	9,425		
24	5	0,5	–4,900	8,775	–4,903	9,020	–4,137	9,069		
25	6	0,6	–5,880	8,236	–5,884	8,529	–4,555	8,655		
26	7	0,7	–6,860	7,599	–6,864	7,941	–4,842	8,199		
27	8	0,8	–7,840	6,864	–7,845	7,255	–5,032	7,715		
28	9	0,9	–8,820	6,031	–8,825	6,470	–5,155	7,212		
29	10	1	–9,800	5,100	–9,805	5,588	–5,232	6,696		
30	11	1,1	–10,780	4,071	–10,784	4,607	–5,280	6,173		
31	12	1,2	–11,760	2,944	–11,763	3,529	–5,310	5,645		
32	13	1,3	–12,740	1,719	–12,741	2,352	–5,328	5,114		
33	14	1,4	–13,720	0,396	–13,718	1,078	–5,340	4,581		
34	15	1,5	–14,700	–1,025	–14,695	–0,294	–5,346	4,047		
35	16	1,6					–5,351	3,513		
36	17	1,7					–5,353	2,978		
37	18	1,8					–5,355	2,442		
38	19	1,9					–5,356	1,907		
39	20	2					–5,356	1,371		
40	21	2,1					–5,357	0,836		
41	22	2,2					–5,357	0,300		
42	23	2,3					–5,357	–0,236		

Это значение хорошо согласуется с результатом, полученным в электронной таблице.

Задача 2. Рассчитать время падения шара в воде с точностью до 0,01 секунды.

Для решения поставленной задачи будем производить вычисления по модели (3.12)–(3.13) с шагом по времени 0,001 с и полученный результат (время падения на Землю) округлим до 0,01. В этом случае неудобно работать с электронными таблицами. Пришлось бы выполнить более двух тысяч шагов по времени, и значит, построить таблицу более чем из 2000 строк!

Для решения задачи составим программу на Паскале. Текст программы приведен ниже. Переменная Dt — шаг по времени. Переменная n — число шагов между двумя выводами результатов на экран. Например, если задать Dt = 0,001, n = 100, то шаг вывода результатов на экран будет равен 0,1 — как в электронной таблице.

```
Program  Sharik;
//Физические параметры - константы
Const Ro_shar=7800; Ro_sreda=1000;  Mju=1.002;
      H=10;   V0=0;     r=0.05;  g=9.8;
Var i, n: integer;
    t, y, Dt, m, V, k1, k2: real;
begin
  //Вычисляемые параметры
  k1:= 6*Pi*Mju*r; k2:=0.2*Pi*r*r*Ro_sreda;
  m:=4/3*Pi*r*r*r*Ro_shar;
  //Вводимые данные
  Write('Шаг по времени:'); readln(Dt);
  Write('Число шагов между выводами:'); readln(n);
  //Пошаговые вычисления
  i:=0; t:=0; V:=V0;  y:=H+V*Dt;
  while y>0 do  //Цикл закончится при достижении
                //поверхности Земли
  Begin
    i:=i+1;
    t:=t+Dt;
    V:=V+(k1*V+k2*V*V-m*g)/m*Dt; //Подсчет скорости
    //Вывод через n шагов по времени
    if i mod n=0 then Writeln(t:7:4,abs(V):7:4,y:7:4);
    y:=y+V*Dt;   //Подсчет координаты
  end;
  // Вывод окончательного результата
  Writeln('Tmax=', t:7:4, ' Vmax=', abs(V):7:4)
end.
```

Выполненные по этой программе расчеты падения шарика в воде с шагом $\Delta t = 10^{-3}$ дали следующее значение для времени столкновения с Землей: $Tmax = 2{,}23$ секунды. Скорость в момент падения равна $Vmax = 5{,}355$ м/с.

О погрешности результата моделирования. Подтверждением правильности результатов вычислительного эксперимента является их совпадение с результатами физического эксперимента. И если расхождение этих результатов превышает допустимые пределы, то надо вносить изменения в математическую модель.

Расхождение между результатами вычислительного и физического эксперимента зависит еще от погрешности, содержащейся в исходных данных — физических параметрах задачи. В нашем примере — это плотность, вязкость и др. Даже величина ускорения свободного падения, принятая равной 9,8 м/с^2, не является точным значением, поскольку это значение зависит от географических координат места эксперимента.

Основное правило гласит: точность результата расчетов не может быть выше точности исходных данных. Точность определяется величиной, которая называется относительной погрешностью. Приближенное значение величины X принято представлять в интервальной форме: $X \pm \Delta X$. Здесь ΔX — абсолютная погрешность. Относительная погрешность равна отношению абсолютной погрешности к самой величине: $\delta X = \Delta X / X$. Она измеряется в долях единицы или в процентах. Отсюда следует: $\Delta X = X \cdot \delta X$.

Приведем пример оценки относительной погрешности результата. Допустим, что самую большую абсолютную погрешность среди параметров задачи имеет величина $g = 9{,}8 \pm 0{,}01$. Ее относительная погрешность равна приблизительно $0{,}01/9{,}8 \approx 0{,}001 = 0{,}1\%$. Тогда можно считать, что относительная погрешность результата составляет примерно такую же величину. Определим абсолютные погрешности для $Tmax$ и $Vmax$:

$\Delta Tmax = 2{,}23 \cdot 0{,}001 \approx 0{,}003$ (погрешности всегда округляются в сторону увеличения);

$\Delta Vmax = 5{,}355 \cdot 0{,}001 \approx 0{,}006$.

Следовательно, окончательные результаты в интервальной форме нужно записать так: $Tmax = 2{,}230 \pm 0{,}003$; $Vmax = 5{,}355 \pm 0{,}006$. Нет смысла записывать в результатах 4-ю, 5-ю и более младшие цифры после запятой, так как они заведомо неверные.

Вопросы и задания

1. Что такое вычислительный эксперимент?
2. Какие цели ставились при выполнении вычислительного эксперимента, описанного в параграфе?

3. Какие преимущества дает использование электронных таблиц при выполнении вычислительного эксперимента?
4. Какие возможны причины расхождения между результатами физического и вычислительного экспериментов?
5. Влияет ли реально на рассмотренное движение составляющая силы сопротивления, пропорциональная квадрату скорости? (Для ответа на этот вопрос надо провести тот же численный эксперимент, положив k_2 равным нулю.)

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.2.4. Математическая модель задачи баллистики

Термин «баллистика» происходит от греческого слова, обозначающего «бросать». *Баллистикой* называется раздел классической механики, изучающий движение тел, брошенных в пространстве. Баллистика занимается главным образом исследованием движения снарядов, выпущенных из огнестрельного оружия, и баллистических ракет. Специалисты по артиллерии различают внутреннюю баллистику — движение снаряда внутри ствола оружия и внешнюю баллистику — движение вне орудийного ствола. Далее мы будем иметь в виду только внешнюю баллистику.

Постановка задачи: из ствола пушки, направленного под углом α_0 к горизонту, со скоростью v_0 вылетает снаряд. Требуется рассчитать траекторию движения снаряда.

Будем рассматривать движение снаряда в двумерном пространстве. Построим математическую модель процесса. Оси координат направим так, как показано на рис. 3.10. Движение происходит в атмосферном воздухе. Будем учитывать действие на движение снаряда двух сил: силы тяжести $\vec{F}_{\text{т}}$ и силы сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{с}}$. Сила сопротивления в любой точке траектории движения направлена противоположно направлению вектора скорости, как показано на рис. 3.11.

Уравнение второго закона Ньютона в векторной форме имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{т}} + \vec{F}_{\text{с}}.$$

Запишем проекции этого уравнения на оси X и Y:

$$ma_x = -F_{\text{c}}\cos\alpha, \qquad (3.14)$$

$$ma_y = -mg - F_{\text{c}}\sin\alpha. \qquad (3.15)$$

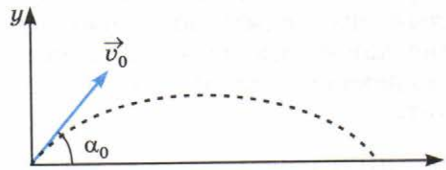


Рис. 3.10. Задача баллистики

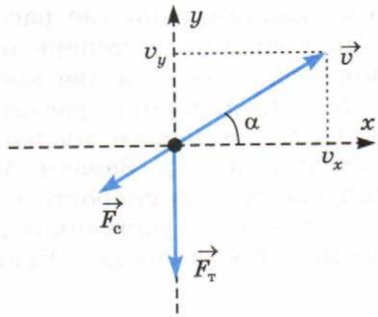


Рис. 3.11. Векторы сил и скорости

Ранее рассказывалось о том, что сила сопротивления вычисляется по следующей формуле:

$$F_c = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v^2, \tag{3.16}$$

где k_1 — коэффициент вязкого трения, k_2 — коэффициент лобового сопротивления, v — величина скорости. Из рисунка 3.11 и теоремы Пифагора следует:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,.$$

Тригонометрические функции угла α можно также выразить через проекции скорости:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\,. \tag{3.17}$$

Подставив в формулы (3.14) и (3.15) выражения из формул (3.16) и (3.17), выполнив тождественные преобразования и выразив проекции ускорения, получим:

$$a_x = \frac{-(k_1 + k_2\sqrt{v_x^2 + v_y^2})v_x}{m}, \tag{3.18}$$

$$a_y = \frac{(k_1 + k_2\sqrt{v_x^2 + v_y^2})v_y + mg}{m}\,. \tag{3.19}$$

Движения в направлении осей X и Y происходят с ускорениями, выражаемыми формулами (3.18) и (3.19). Это переменные величины, следовательно, движение не будет равноускоренным, поэтому использовать формулы кинематики равноускоренного движения здесь нельзя. В отличие от задачи о свободном вертикальном падении тела, где рассчитывалась одна величина скорости и одна координата, теперь нужно рассчитывать две составляющие скорости v_x и v_y и две координаты x и y.

Для выполнения расчетов траектории движения снаряда используем *методику численного* (*дискретного*) *моделирования* (см. параграф 3.1.2). Задаем Δt — малый шаг изменения времени. Допускаем, что скорость и ускорение движения на каждом шаге по времени не изменяются, а при переходе к следующему шагу изменяются скачком. Отсюда следует:

$$v_x^{(i+1)} = v_x^{(i)} + a_x^{(i)}\Delta t\ ; \tag{3.20}$$

$$v_y^{(i+1)} = v_y^{(i)} + a_y^{(i)}\Delta t. \tag{3.21}$$

Здесь номер шага по времени записывается верхним индексом в скобках. Подставив сюда формулы для ускорения (3.18) и (3.19), получим:

$$v_x^{(i+1)} = v_x^{(i)} - \frac{(k_1 + k_2\sqrt{v_x^{(i)2} + v_y^{(i)2}})v_x^{(i)}}{m}\Delta t\ ; \tag{3.22}$$

$$v_y^{(i+1)} = v_y^{(i)} - \frac{(k_1 + k_2\sqrt{v_x^{(i)2} + v_y^{(i)2}})v_x^{(i)} + mg}{m}\Delta t. \tag{3.23}$$

Координаты вычисляются по формулам:

$$x_{i+1} = x_i + v_x^{(i)}\Delta t; \tag{3.24}$$

$$y_{i+1} = y_i + v_y^{(i)}\Delta t. \tag{3.25}$$

Начальные значения:

$$x_0 = 0;\quad y_0 = 0;\quad v_x^{(0)} = v_0\cos\alpha_0;\quad v_y^{(0)} = v_0\sin\alpha_0. \tag{3.26}$$

Формулы (3.22)–(3.26) представляют собой дискретную математическую модель задачи баллистики.

Задача баллистики при отсутствии силы сопротивления

Вспомним один из принципов математического моделирования: если есть возможность получить точное аналитическое решение задачи для какого-нибудь частного случая, то нужно использовать его для отладки программы численного моделирования.

Для задачи баллистики таким частным случаем является полет снаряда в пустоте, когда сопротивление среды не принимается в расчет. Тогда движение можно рассматривать как совокупность двух независимых перемещений — равномерного в горизонтальном направлении (так как в этом направлении никакие силы не действуют) и равноускоренного в вертикальном (под действием постоянной силы тяжести). Указанные движения описываются следующими формулами:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha_0, \quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha_0 - gt; \qquad (3.27)$$

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha_0 \cdot t, \quad y = \upsilon_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3.28)$$

Используя формулы (3.28), выразим t через x и подставим полученное выражение в формулу для y. Получим траекторию движения:

$$y = tg\alpha_0 \cdot x - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot x^2. \qquad (3.29)$$

Формула (3.29) — это уравнение параболы. Ветви этой параболы направлены вниз и симметричны относительно верхней точки траектории, как показано на рис. 3.10.

Обозначим через B максимальную высоту подъема снаряда, через A — максимальную дальность полета по горизонтали и через T — полное время движения от выстрела до падения на Землю. При отсутствии сопротивления среды ветви траектории полета на участках подъема и спуска симметричны относительно верхней точки траектории. В этой точке вертикальная составляющая скорости равна нулю: $0 = \upsilon_0 \sin\alpha_0 - g\frac{T}{2}$, откуда находим T. После этого, воспользовавшись формулами (3.28), последовательно находим B и A.

$$T = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g}, \quad B = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}, \quad A = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}. \qquad (3.30)$$

Система основных понятий

Математическая модель задачи баллистики	
Баллистика — *раздел механики, изучающий движение тел, брошенных в пространстве*	
Без учета силы сопротивления (в пустоте)	**С учетом силы сопротивления**
Аналитическая модель: $v_x = v_0 \cos\alpha_0$, $v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$; $x = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t$, $y = v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Баллистическая траектория: $y = tg\,\alpha_0 \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} \cdot x^2$	Численная модель: $v_x^{(0)} = v_0 \cos\alpha_0$; $v_y^{(0)} = v_0 \sin\alpha_0$; $v_x^{(i+1)} = v_x^{(i)} - \frac{(k_1 + k_2\sqrt{v_x^{(i)2} + v_y^{(i)2}})v_x^{(i)}}{m}\Delta t$; $v_y^{(i+1)} = v_y^{(i)} - \frac{(k_1 + k_2\sqrt{v_x^{(i)2} + v_y^{(i)2}})v_y^{(i)} + mg}{m}\Delta t$. $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $x_{i+1} = x_i + v_x^{(i)}\Delta t$; $y_{i+1} = y_i + v_y^{(i)}\Delta t$; $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

Вопросы и задания

1. Что такое баллистика?
2. Сформулируйте постановку задачи о полете снаряда, вылетающего из пушки.
3. Какие силы учитываются при математическом моделировании полета снаряда?
4. Как можно рассчитать максимальную высоту и дальность полета снаряда при движении в пустоте?
5. Какие величины и в какой последовательности надо вычислять на каждом шаге по времени при численном моделировании полета снаряда с учетом сопротивления воздуха?
6. Постройте блок-схему алгоритма расчета баллистической траектории полета снаряда в воздухе.

3.2.5. Численный расчет баллистической траектории

Проведем расчеты полета снаряда, используя математическую модель (3.22)–(3.26). Параметры плотности и динамической вязкости атмосферного воздуха примем такими же, как в задаче о свободном падении (параграф 3.2.3). Снаряд — сплошной железный шар диаметром 20 см.

В таблице 3.2 приведены результаты расчетов с помощью электронной таблицы проекций скорости на оси X и Y и координат снаряда в зависимости от времени. Начальная скорость равна 200 м/с, начальный угол выстрела по отношению к оси X равен 30°.

Отметим следующее важное обстоятельство. *Принятая нами модель движения снаряда справедлива только при дозвуковых скоростях.* С превышением звукового барьера скорости (330 м/с) изменяется формула для расчета силы сопротивления.

В этой же таблице для сравнения реализован расчет движения снаряда в пустоте, т. е. без сопротивления воздуха. В этом расчете используются формулы (3.27), (3.28). Вычисления прекращаются, как только значение координаты y становится меньшим или равным нулю.

В предположении, что полет снаряда происходит в пустоте, получился следующий результат: снаряд упал на землю между 20-й и 21-й секундами на расстоянии приблизительно 3500 метров от пушки. Учет сопротивления воздуха дал следующий результат: снаряд упал на землю между 18-й и 19-й секундами на расстоянии от пушки приблизительно 2300 метров. Если цель находится на расстоянии 3500 метров, то снаряд упадет ближе от нее на 800 метров. Это серьезный промах!

На рисунке 3.12 показаны графики траекторий, построенные по данным из табл. 3.2. Хорошо видно, как строгая, параболическая форма траектории движения в пустоте искажается при наличии сопротивления среды. Уменьшилась не только дальность полета по оси X, но и максимальная высота подъема снаряда над Землей.

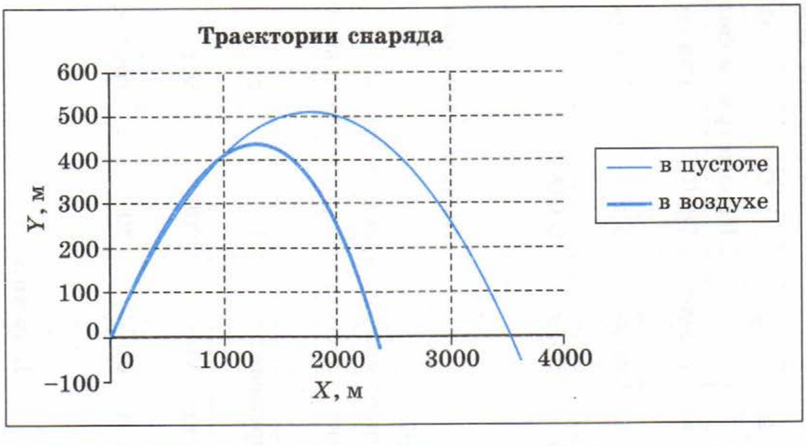


Рис. 3.12. Траектории полета снаряда в пустоте и в воздухе

А теперь вспомним, что результат содержит погрешность численного метода из-за конечной величины шага по времени. Проведем уточняющие расчеты. Для этого используем программу на Паскале. Структура программы аналогична программе из параг-

Таблица 3.2

Вычислительный эксперимент в электронной таблице по расчету траектории полета снаряда

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				**Параметры модели (константы)**						
2	Плотность снаряда:		ρжел=	7800	Радиус снаряда:		r=	0,1	м	
3	Плотность воздуха:		ρвоз=	1,29	Ускорение св. пад.:		g=	9,8	м/(с·с)	
4	Вязкость воздуха:		μвоз=	0,0182						
5										
6				**Вычисляемые параметры модели:**						
7	Масса шара:					m=	32,67256	кг		
8	Коэффициент вязкого трения воздуха:					K1=	0,034306			
9	Коэффициент лобового сопротивления воздуха:					K2=	0,008105			
10										
11	Шаг по времени: Δt=			1	с					
12	Начальная скорость:		V0=	200	м/с					
13	Начальный угол		α0 =	30	град.					
14										
15			**В пустоте**				**В воздухе**			
16	**i**	**ti**	**Vx**	**Vy**	**x**	**y**	**Vx**	**Vy**	**x**	**y**
17	0	0	173,21	100,00	0,00	0,00	173,21	100,00	0,00	0,00

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
18	1	1	173,21	90,20	173,21	95,10	164,43	85,24	173,21	100,00
19	2	2	173,21	80,40	346,41	180,40	156,70	71,52	337,63	185,24
20	3	3	173,21	70,60	519,62	255,90	149,84	58,66	494,34	256,76
21	4	4	173,21	60,80	692,82	321,60	143,70	46,52	644,18	315,42
22	5	5	173,21	51,00	866,03	377,50	138,17	34,98	787,88	361,94
23	6	6	173,21	41,20	1039,23	423,60	133,14	23,94	926,05	396,92
24	7	7	173,21	31,40	1212,44	459,90	128,53	13,33	1059,18	420,85
25	8	8	173,21	21,60	1385,64	486,40	124,27	3,11	1187,71	434,19
26	9	9	173,21	11,80	1558,85	503,10	120,31	−6,79	1311,99	437,29
27	10	10	173,21	2,00	1732,05	510,00	116,59	−16,39	1432,30	430,50
28	11	11	173,21	−7,80	1905,26	507,10	113,06	−25,71	1548,89	414,11
29	12	12	173,21	−17,60	2078,46	494,40	109,69	−34,77	1661,95	388,40
30	13	13	173,21	−27,40	2251,67	471,90	106,44	−43,58	1771,64	353,63
31	14	14	173,21	−37,20	2424,87	439,60	103,29	−52,14	1878,08	310,04
32	15	15	173,21	−47,00	2598,08	397,50	100,22	−60,44	1981,37	257,91
33	16	16	173,21	−56,80	2771,28	345,60	97,21	−68,49	2081,59	197,46
34	17	17	173,21	−66,60	2944,49	283,90	94,24	−76,27	2178,80	128,97
35	18	18	173,21	−76,40	3117,69	212,40	91,30	−83,78	2273,04	52,70
36	19	19	173,21	−86,20	3290,90	131,10	88,40	−91,00	2364,34	−31,08
37	20	20	173,21	−96,00	3464,10	40,00				
38	21	21	173,21	−105,80	3637,31	−60,90				

рафа 3.2.3, где рассчитывалось одномерное вертикальное движение. В программе, приведенной ниже, рассчитывается движение в направлении осей X и Y.

```
Program  Pushka;
Const Ro_shar=7800; Ro_sreda=1.29;  Mju=0.0182;
      V0=200; Alf_0=30;   r=0.1;  g=9.8;
Var i, n: integer;
    t, x, y, Dt, m, Vx, Vy, Vx1, k1, k2: real;
begin
  k1:= 6*Pi*Mju*r; k2:=0.2*Pi*r*r*Ro_sreda;
  m:=4/3*Pi*r*r*r*Ro_shar;
  Write('Шаг по времени:'); readln(Dt);
  Write('Число шагов между выводами:'); readln(n);
  i:=0; t:=0;
  Vx:=V0*cos(Alf_0*Pi/180); Vy:=V0*sin(Alf_0*Pi/180);
  y:=Vy*Dt; x:=Vx*Dt;
  while y>=0 do
  begin
    i:=i+1;
    t:=t+Dt;
    Vx1:=Vx-(k1+k2*sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy))*Vx/m*Dt;
    Vy:=Vy-((k1+k2*sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy))*Vy+m*g)/m*Dt;
    Vx:=Vx1;
    if i mod n = 0 then
      Writeln(t:8:2, Vx:8:3, Vy:8:3, x:8:2, y:8:2);
    y:=y+Vy*Dt; x:=x+Vx*Dt;
  end;
  Writeln('Tmax=', t:7:4, ' Xmax=', x:7:4)
end.
```

Для тех же физических параметров задачи, что и раньше, был проведен расчет полета снаряда с шагом по времени Dt = 0,01. Число шагов между выводами на экран удобно принять равным 100. Тогда результаты будут выводиться в те же моменты времени, что и в электронной таблице. Окончательный результат получился следующим: время полета до падения на землю $Tmax$ = 17,89 секунды; расстояние до места падения от пушки $Xmax$ = 2248,8 метра. Это приблизительно на 50 метров отличается от прежнего результата.

Мы рассмотрели упрощенную модель полета снаряда. Возможность уточнения модели связана с многими обстоятельствами. Как уже говорилось, с превышением звукового барьера скорости меняется формула расчета силы сопротивления. В современной пушке скорость вылета снаряда в 2–3 раза превышает скорость звука. Следующий важный фактор — форма снаряда. Круглыми чугунными ядрами стреляли на заре артиллерии. Форма современного артиллерийского снаряда минимизирует силу сопротивления. При расчетах для дальнобойной артиллерии учитываются неоднородность плотности воздуха на разных высотах, кривизна и вращение Земли и другие факторы. А при запуске баллистической ракеты учитывается уменьшение массы ракеты в результате сгорания топлива.

Вопросы и задания

1. В таблице 3.2 показана электронная таблица в режиме отображения значений. Запишите формулы для расчета при движении в пустоте скоростей v_x и v_y, занесенные в ячейки C18, D18, и формулы для расчета координат x, y, занесенные в ячейки E18, F18.
2. Запишите формулы для расчета скоростей v_x и v_y при движении в воздухе, занесенные в ячейки G18, H18, и формулы для расчета координат x, y, занесенные в ячейки I18, J18.
3. Используя данные из таблицы 3.2, сопоставьте время достижения высшей точки траектории и высоту этой точки для расчета в пустоте и воздухе.
4. Какими преимуществами для организации вычислений обладает приведенная программа на Паскале по сравнению с моделью в электронной таблице?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.2.6. Расчет стрельбы по цели в пустоте

Рассмотрим решение следующей задачи. Имеется цель, в которую нужно попасть снарядом, выпущенным из пушки. Пусть цель имеет форму шара (в сечении плоскостью XOY — форму круга) с диаметром d. Координаты центра цели: $x = L$, $y = H$. Известна также величина начальной скорости снаряда. Требуется определить α_0 — угол вектора начальной скорости к оси X. Назовем его углом прицела.

Данную задачу можно назвать обратной задачей по отношению к той, что решалась в предыдущем параграфе. Там были заданы начальные условия (при $t = 0$): начальная скорость и угол прицела, а результатом была траектория движения. Это прямая задача. В обратной задаче, при данной величине начальной скорости, известна одна точка, лежащая на траектории, — положение цели, а вычислить надо второе начальное условие — угол прицела.

Математическая модель

В параграфе 3.2.4 было получено уравнение траектории движения снаряда (3.29) для модели без учета сопротивления воздуха. Теперь получим ответ на вопрос: при каких условиях можно поразить снарядом, выпущенным с начальной скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту, мишень, находящуюся в точке с координатами $x = L$, $y = H$? И какая для этого должна быть связь между величинами v_0 и α_0? В приближении без учета сопротивления воздуха поставленную задачу можно решить точно, используя полученную ранее аналитическую модель.

Поскольку траектория полета снаряда должна проходить через указанную мишень (рис. 3.13), из формулы (3.29) получаем:

$$H = \mathrm{tg}\alpha_0 \cdot L - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} \cdot L^2. \qquad (3.31)$$

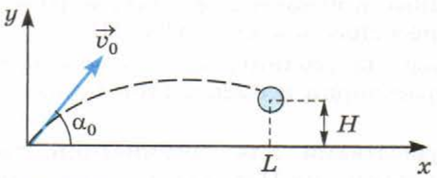


Рис. 3.13. Стрельба по цели

Это и есть искомое соотношение между значениями v_0 и a_0, заданное в неявной форме. Из него можно получить формулу для вычисления значения начальной скорости при заданном угле прицела, решая квадратное уравнение относительно v_0 (отрицательный корень отбрасываем):

$$v_0 = \frac{L}{\cos\alpha_0} \sqrt{\frac{g}{2(L \cdot \mathrm{tg}\alpha_0 - H)}}. \qquad (3.32)$$

Из (3.32) вытекает важное ограничение на угол прицела: $L \cdot \mathrm{tg}\alpha_0 - H > 0$ — иначе задача не имеет решения ни при каком сочетании v_0 и α_0. Отсюда минимальное значение угла прицела равно:

$$\alpha_{0\min} = \mathrm{arctg}\left(\frac{H}{L}\right).$$

Из рисунка 3.14 становится понятным геометрический смысл этой величины.

Система координат нами выбрана так, что цель находится в первой четверти координатной плоскости. Значит, угол прицела должен быть меньше 90°. Следовательно, величина угла прицела должна удовлетворять условию:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{H}{L}\right) < \alpha_0 < 90^\circ. \qquad (3.33)$$

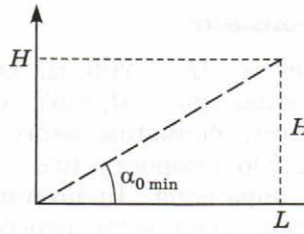


Рис. 3.14. Минимальный угол прицеливания

Теперь выразим из (3.31) величину α_0. Для этого нужно воспользоваться следующей тригонометрической формулой: $\cos^2 x = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 x)$. После выполнения тождественных преобразований получим квадратное уравнение для $\operatorname{tg}\alpha_0$. Решая это уравнение, получим формулу:

$$tg\alpha_0 = \frac{v_0^2}{gL} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1}. \qquad (3.34)$$

Отсюда, в частности, следует, что задача имеет решение лишь при выполнении условия $\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1 > 0$ и что при этом для попадания в мишень можно стрелять под двумя разными углами: получаем *навесную* и *настильную* стрельбу (рис. 3.15). Большее значение угла (навесная стрельба) равно:

$$\alpha_{01} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1}\right). \qquad (3.35)$$

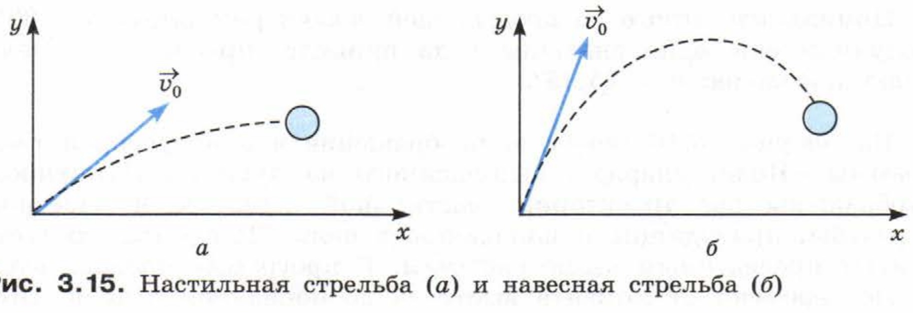


Рис. 3.15. Настильная стрельба (*а*) и навесная стрельба (*б*)

Меньшее значение угла (настильная стрельба) равно:

$$\alpha_{02} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1}\right). \quad (3.36)$$

Вычислительный эксперимент

<u>Задача 1.</u> Пусть L = 700 м, H = 200 м. Ограничение на угол прицела приводит к условию $\mathrm{tg}\alpha > 0{,}2857$, или $\alpha > 15°56'$. При стрельбе под любым углом, бóльшим этого (но меньшим 90°), можно подобрать начальную скорость (см. соотношение (3.31)), при которой цель будет поражена. Выполним расчет начальной скорости для угла прицела, используя формулу (3.32). Вычисления производились в электронной таблице.

Расчет начальной скорости					
H=	200	L=	700	G=	9,8
Alfa0=	30	град.			
V0=	125,23	м/с			

В результате получили: v_0 = 125,23 м/с.

<u>Задача 2.</u> Как и в предыдущей задаче, положим L = 700 м, H = 200 м. Пусть начальная скорость равна v_0 = 125,23 м/с. Определим, под какими углами прицела можно попасть в цель. Для вычислений используются формулы (3.34), (3.35).

Расчет угла прицела					
H=	200	L=	700	G=	9,8
V0=	125,23	м/с			
Настильный прицел			Навесной прицел		
Alfa1=	30,00	град	Alfa2=	75,95	град

Помимо известного из предыдущей задачи результата α = 30°, получили еще одно значение угла прицела, при котором цель будет поражена: α = 75,95°.

На рисунке 3.16 показано изображение в окне учебной программы «Полет снаряда, выпущенного из пушки». Пунктиром отображены две траектории: настильной стрельбы и навесной стрельбы, приводящие к попаданию в цель. Параметры соответствуют проведенным выше расчетам. В программе производится расчет времени от момента выстрела до попадания в цель. При

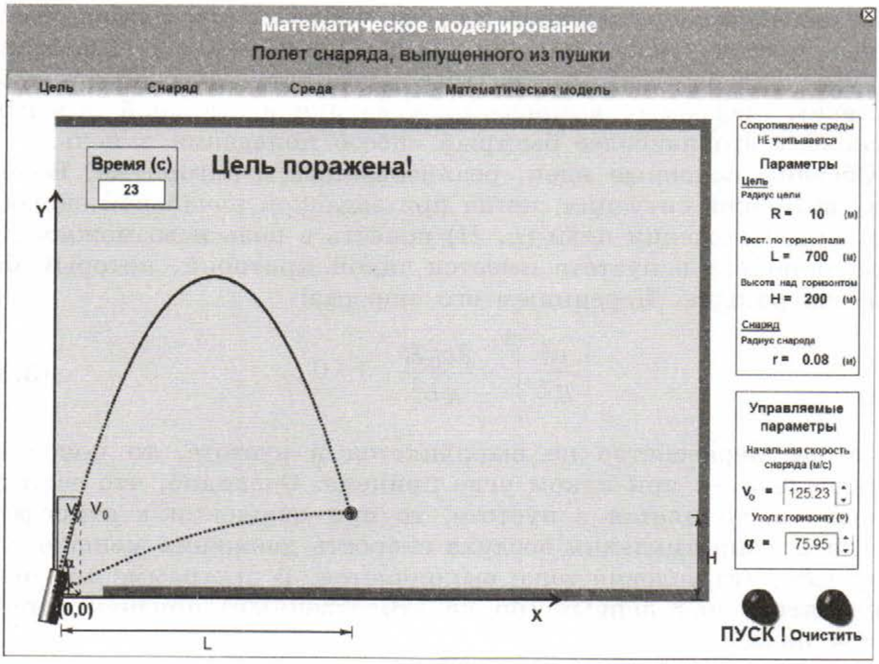


Рис. 3.16. Эксперимент в учебной программе. Стрельба по цели в пустоте

навесной стрельбе это время равно 23 секунды, при настильной стрельбе — 6,5 секунды. Это обстоятельство может оказаться важным в реальных условиях.

Вопросы и задания

1. Что такое настильная стрельба и навесная стрельба?
2. Воспроизведите вывод формул (3.32) для начальной скорости и (3.34) для угла прицела.
3. Воспроизведите в электронной таблице вычислительные эксперименты из задач 1 и 2.
4. С помощью электронной таблицы вычислите углы для настильной и навесной стрельбы в пустоте для попадания в цель на расстоянии $L = 1000$ м на высоте $H = 100$ при начальной скорости снаряда 200 м/с. Проверьте полученные результаты в учебной программе «Полет снаряда, выпущенного из пушки». Радиус цели — 2 метра.

3.2.7. Расчет стрельбы по цели в атмосфере

Составим программу на Паскале для вычисления угла прицела при заданной начальной скорости снаряда с использованием модели, учитывающей сопротивление воздуха. Как вам уже известно, если в цель можно попасть, то для этого существуют два угла прицела: угол для настильной стрельбы и угол для навесной стрельбы. Составим программу вычисления угла для настильной стрельбы, поскольку это наиболее быстрый способ попадания в цель.

Обсудим основные идеи, реализованные в алгоритме. Во-первых, возможна ситуация, когда при заданной начальной скорости (v_0) и расположении цели (L, H) попасть в цель невозможно. Для модели полета в пустоте имеется такой критерий, который был получен раньше. Перепишем его еще раз:

$$\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1 > 0\,. \tag{3.37}$$

Если это неравенство не выполняется в пустоте, то попасть в цель нельзя ни при каком угле прицела. Очевидно, что если это условие выполняется в пустоте, то при движении в атмосфере, где из-за сопротивления воздуха скорость движения меньше, чем в пустоте, это условие тоже выполняется. В программе оно будет проверяться как первый (но не единственный) признак попадания в цель.

Угол прицела будет рассчитываться *методом последовательных приближений*. Начиная с некоторого минимального значения, угол прицела увеличивается с постоянным шагом, пока не произойдет перелет через цель. После этого на последнем шаге угол будет уточняться методом половинного деления.

Какое значение принять за минимальный угол? И снова нам поможет результат анализа модели движения в пустоте. Для минимального значения угла прицела там была получена формула:

$$\alpha_{0\,\min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{L}\right).$$

Очевидно, что ее можно применить и для расчета угла прицела в атмосфере, поскольку при меньшем значении угла попасть в цель нельзя ни в пустоте, ни в атмосфере.

Ниже приведена программа расчета. В ней используется процедура `Polet(Alf: real; Var y, t: real)`, вычисляющая траекторию полета снаряда. В процедуре реализован тот же алгоритм расчета траектории полета в атмосфере, который использовался в программе `Pushka` в параграфе 3.2.5. В тексте программы для расчета траектории задан шаг по времени, равный 0,001 секунды. Для достижимой в данной модели точности это достаточное значение. Впрочем, путем редактирования программы можно этот шаг изменить.

Физические константы в программе заданы для железного снаряда шаровой формы радиуса *r*. Также заданы константами плотность и динамическая вязкость воздуха при давлении 1 атм. и температуре 20 °C.

```
Program  Strelba;
//Расчет угла прицела при настильной стрельбе в атмосфере
Const Ro_shar=7800; Ro_sreda=1.29;  Mju=0.0182; g=9.8; r=0.08;

Var L, H, RC, V0, x, y, t, y1, Dt, Alf, Alf1, Alf2, dAlf, m,
    k1, k2: real;

Procedure Polet(Alf: real; Var y, t: real);
//Процедура расчета траектории полета снаряда до x=L
Var Vx, Vy, Vx1: real;
begin
  t:=0;
  Vx:=V0*cos(Alf); Vy:=V0*sin(Alf);
  y:=Vy*Dt; x:=Vx*Dt;
  while (x<=L) do
  begin
    t:=t+Dt;
    Vx1:=Vx-(k1+k2*sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy))*Vx/m*Dt;
    Vy:=Vy-((k1+k2*sqrt(Vx*Vx+Vy*Vy))*Vy+m*g)/m*Dt;
    Vx:=Vx1;
    y:=y+Vy*Dt; x:=x+Vx*Dt;
  end;
end;

begin
  k1:= 6*Pi*Mju*r; k2:=0.2*Pi*r*r*Ro_sreda;
  m:=4/3*Pi*r*r*r*Ro_shar;
  Dt:=0.001; //Шаг по времени в секундах
  dAlf:=2;   //Шаг изменения угла в градусах
  Write('X-координата цели: L='); Readln(L);
  Write('Y-координата цели: H='); Readln(H);
  Write('Радиус цели: RC='); Readln(RC);
  Write('Начальная скорость снаряда: V0='); Readln(V0);
  //Проверка условия (3.37);
  //exit - прерывание работы программы
  if sqr(V0*V0/g/L)-2*V0*V0*H/g/L/L-1<0 then
  begin writeln('В цель не попасть'); exit end;
  //Пошаговое прицеливание
  dAlf:=dAlf*Pi/180;
  Alf:=arctan(H/L);
  Polet(Alf, y, t);
```

```
repeat
  y1:=y;            //Сохранение предыдущего результата
  Alf:=Alf+dAlf;
  Polet(Alf, y, t);
until (y>=H) or (y<y1);
if y<y1 then
begin
  Writeln('В цель не попасть'); exit
end;
Alf2:=Alf; //Верхняя граница вилки прицела
Alf1:=Alf-dAlf; //Нижняя граница вилки прицела
//Уточнение прицела методом половинного деления
while abs(y-H)>r+RC do
begin
  Alf:=(Alf1+Alf2)/2;
  Polet(Alf, y, t);
  if (y-H)<0 then Alf1:=Alf else Alf2:=Alf
end;
//Вывод угла прицела и времени полета снаряда
Writeln(' Alf=', (Alf1+Alf2)/2*180/Pi:6:2, ' градусов',
        ' t=', t:6:2, ' секунд')
End.
```

Пояснение к программе

Поясним алгоритм, реализованный в программе. Задается начальное значение угла прицела Alf:=arctan(H/L). С помощью процедуры Polet рассчитывается траектория движения снаряда до пересечения им координаты $x = L$. В результате получается координата y такого пересечения (она может быть и отрицательной). Затем увеличивается угол прицела на величину $dAlf = 2$ градуса и снова рассчитывается траектория. Этот процесс продолжается циклически до тех пор, пока снаряд не пролетит выше цели или пока не попадет в цель, т. е. пока не выполнится условие $y \geq H$. Впрочем, вероятность получения точного равенства $y = H$ очень мала. Последнее значение угла прицела заносится в переменную $Alf2$ (перелет), предпоследнее значение — в переменную $Alf1$ (недолет). Найдена «вилка» прицела, в пределах которой находится цель.

Однако «вилка» может быть не найдена, если с увеличением угла прицела координата y пересечения траектории с линией $x = L$ сначала будет расти, но, не дойдя до значения H, начнет уменьшаться. Это признак того, что при данной начальной скорости в цель попасть нельзя. Вычисления прекратятся.

Если же найдена «вилка» прицела, то далее угол уточняется методом половинного деления. Вычисляется среднее значение углов $Alf1$ и $Alf2$: `Alf:=(Alf1+Alf2)/2`. Для этого значения угла прицела с помощью процедуры `Polet` вычисляется траектория, находится y при $x = L$. В зависимости от того, ниже или выше цели пролетел снаряд, «вилка» уменьшается в 2 раза путем присваивания `Alf1:=Alf` или `Alf2:=Alf`. Деление пополам продолжается до тех пор, пока центр снаряда не приблизится к центру цели на расстояние, не большее суммы радиусов цели и снаряда: `abs(y-H)<=r+RC`. В качестве результата выводятся рассчитанный угол прицела и время полета снаряда от момента выстрела до попадания в цель.

Выполнение расчетов

Сначала протестируем программу для частного случая расчета прицела в пустоте. В предыдущем параграфе у нас имеются такие результаты. Для этого путем редактирования изменим значения в программе для плотности и динамической вязкости воздуха: `Ro_sreda=0; Mju=0`.

После запуска программы на исполнение на экране отразится следующий диалог:

```
X-координата цели: L=700
Y-координата цели: H=200
Радиус цели: RC=2
Начальная скорость снаряда: V0=125.23
Alf=30.01 градусов t=6.46 секунд
```

В параграфе 3.2.6, где использовалась точная аналитическая модель, для той же начальной скорости были получены результаты: $\alpha = 30°$, $t = 6{,}5$ с. Эти значения хорошо согласуются с полученными результатами по численной модели. Расхождения объясняются погрешностью численного метода.

Теперь проведем численный эксперимент при учете силы сопротивления атмосферного воздуха. Восстановим в программе значения констант внешней среды: `Ro_sreda=1.29; Mju=0.0182`. Все вводимые параметры зададим такими же, как в предыдущем расчете:

```
X-координата цели: L=700
Y-координата цели: H=200
Радиус цели: RC=2
Начальная скорость снаряда: V0=125.23
Alf=33.2 градусов t=7.61 секунд
```

Как и следовало ожидать, увеличился угол прицела и возросло время полета снаряда до цели. Проверка рассчитанных параметров выстрела в учебной программе (рис. 3.17) дала близкие результаты.

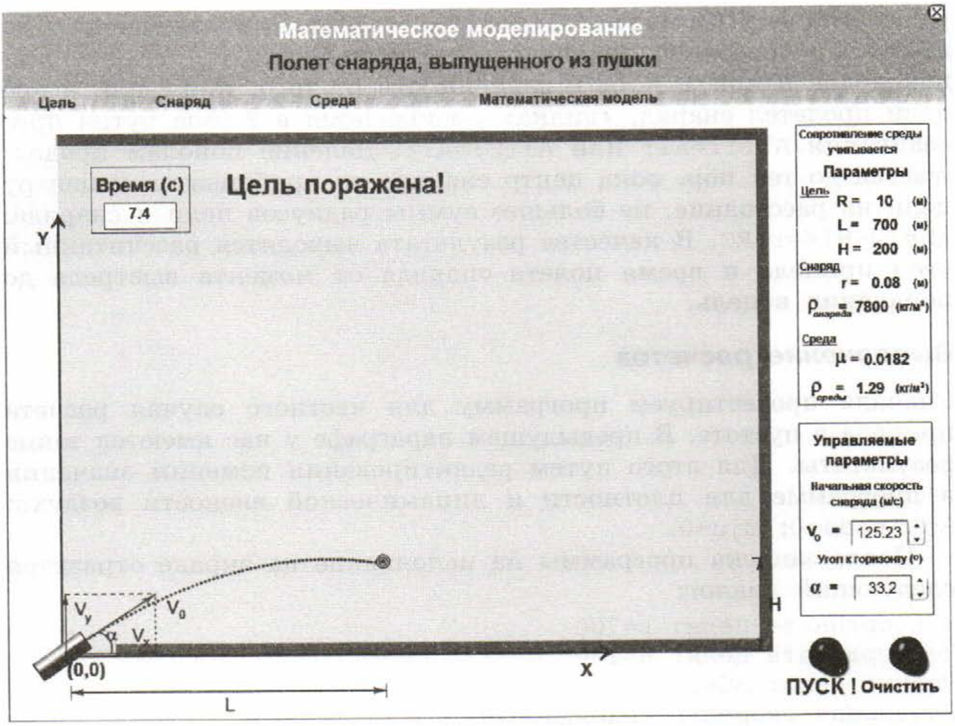


Рис. 3.17. Эксперимент в учебной программе. Стрельба по цели в воздухе

Система основных понятий

Расчет стрельбы по цели	
Постановка задачи Дано: v_0 — начальная скорость снаряда; $x = L$, $y = H$ — координаты цели; R — радиус цели; r — радиус снаряда. Определить: угол прицела α_0	
В пустоте	**В атмосфере**
Точные вычисления по формулам. Угол навесной стрельбы: $$\alpha_{01} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1}\right).$$ Угол настильной стрельбы: $$\alpha_{02} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gL} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gL}\right)^2 - \frac{2v_0^2 H}{gL^2} - 1}\right)$$	Численный метод последовательных приближений. Используется процедура расчета траектории снаряда `Polet`. 1-й этап: пошаговым увеличением угла определяется интервал прицела («вилка» размером 2°); 2-й этап: методом половинного деления уточняется угол прицела

Вопросы и задания

1. В чем суть метода последовательных приближений при вычислении угла прицела для попадания в цель при использовании модели с учетом сопротивления среды?
2. По каким признакам в приведенной в параграфе программе решается вопрос о невозможности попадания в цель?
3. Предложите свой вариант алгоритма расчета угла прицела для навесной стрельбы.

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.3. Моделирование распределения температуры

3.3.1. Задача теплопроводности

Постановка задачи

Теплопроводностью называется процесс распространения тепла в сплошной среде: твердом теле, жидкости или газе. Решать задачи, связанные с теплопроводностью, часто приходится инженерам, ученым, конструкторам. Эта задача заключается в следующем: рассматривается некоторая ограниченная область, содержащая теплопроводный материал. Имеются источники тепла на границе или внутри области. На границах области поддерживается определенный тепловой режим. Требуется рассчитать распределение температуры внутри этой области.

Задача теплопроводности имеет массу практических приложений в производстве и в быту. Это, например, расчет распределения температуры воздуха в жилом помещении, или внутри турбины самолета во время полета, или в кристалле микропроцессора при работе компьютера и т. д. В полной постановке для объемных областей такая задача достаточно сложная. Здесь мы рассмотрим ее простой вариант, построим компьютерную модель и проведем численные эксперименты.

Рассмотрим теплопроводный (например, металлический) стержень с прямоугольной формой поперечного сечения (рис. 3.18). Форму такого стержня может иметь строительная балка или элемент какой-то другой сложной конструкции. Поверхность тела контактирует с внешней средой, которая имеет определенную температуру. Поверхность может контактировать с другими телами (например, нагревателями) и вступать с ними в теплообмен. Возможно также использование теплоизоляционных материалов, защищающих либо всю поверхность, либо ее части от теплообмена с внешней средой. Требуется выполнить расчет распределения температуры внутри стержня при заданных значениях его геометрических и физических параметров, а также при заданных тепловых условиях на поверхности.

Оси координат расположим так, как показано на рис. 3.18. Ось Z проходит по вертикальному ребру стержня. Сделаем упрощающее задачу предположение: размер стержня вдоль оси Z много больше его поперечных размеров. Внешние условия и физические (тепловые) свойства материала не меняются в направлении оси Z. В таком приближении можно перейти к решению задачи в двумерной области: в плоскости поперечного сечения стержня, расположенного вдали от его концов. Будем искать распределение температуры, зависящее только от координат X, Y. Область решения задачи представляет собой прямоугольник размером $a \times b$ (рис. 3.19).

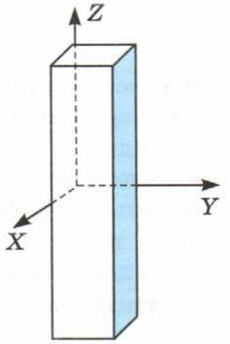


Рис. 3.18. Теплопроводный стержень

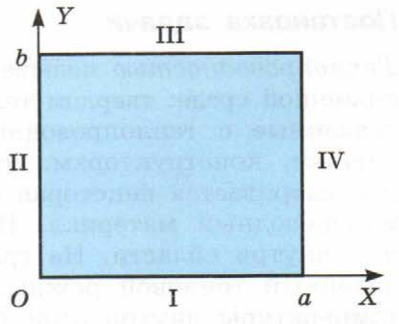


Рис. 3.19. Поперечное сечение стержня

Поперечное сечение стержня имеет четыре прямолинейных граничных участка, которые будем нумеровать так, как показано на рис. 3.19, — римскими цифрами. Будем называть их: 1-я граница, 2-я граница и т. д. На границах поддерживаются определенные тепловые режимы, которые называются *граничными условиями для температуры*.

От граничных условий зависит распределение температуры внутри стержня, которое требуется узнать. Это распределение будем представлять функцией зависимости значения температуры T

от двух переменных — координат x и y: $T(x, y)$ для $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Вариант точного решения задачи

Рассмотрим один частный вариант решения этой задачи (рис. 3.20). Предположим, что 0 °C — это температура внешней среды и первоначальная температура всего стержня. Затем к верхней (3-й) границе подвели нагреватель, который будет поддерживать на ней постоянную температуру, равную 100 °C. Температура на нижней (1-й) границе все время будет оставаться равной 0 °C — температуре внешней среды. 1-ю и 3-ю границы с постоянными значениями температур называются *изотермическими границами*.

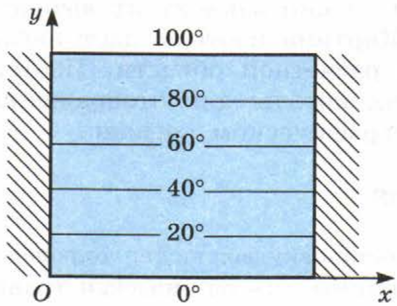


Рис. 3.20. Вариант точного решения

А что происходит при этом на боковых границах — 2-й и 4-й? Они могут быть, например, теплоизолированными. Это обозначает, что данные границы контактируют с каким-то теплоизоляционным материалом, который препятствует теплообмену через эти границы между стержнем и внешней средой. Начиная с момента включения нагревателя, будет происходить прогревание стержня. По истечении некоторого времени, внутри стержня установится постоянное распределение температуры и далее (если на границах ничего не будет меняться) это распределение будет сохраняться. Требуется получить установившееся распределение температуры внутри стержня в виде функции $T(x, y)$ для $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Уравнение, из решения которого находится функция $T(x, y)$, называется *уравнением Лапласа*. Мы его здесь приводить не будем, поскольку это *дифференциальное уравнение*, а в школьном курсе математики такие уравнения не изучаются. Однако решение этого уравнения с описанными граничными условиями является достаточно очевидным. Оно имеет следующий вид:

$$T(x,y) = 100 \cdot \frac{y}{b}. \qquad (3.38)$$

Следовательно, функция T не зависит от x, а зависимость от y имеет линейный характер. Условия на нижней и верхней границах выполняются, поскольку из (3.38) следует:

$$T(x,\ 0) = 0,\ T(x,\ b) = 100.$$

Для графического изображения распределения некоторой функции в области решения задачи используются *изолинии* — линии постоянного значения функции. Изолинии температуры называются *изотермами*. На рисунке 3.20 показана картина изотерм внутри стержня, соответствующая распределению температуры по формуле (3.38). Это равноотстоящие прямые линии, параллельные оси X, которые соответствуют значениям температуры от 0° до 100° с шагом 20°. Количество нарисованных изолиний может быть любым, и оно зависит от выбранного шага изменения температуры. Картина изотерм дает наглядное изображение поля температур в расчетной области. Изотермы используются, например, на картах погоды для отображения поля температур в определенном географическом регионе.

Вопросы и задания

1. Сформулируйте постановку задачи теплопроводности.
2. Что означают термины «изотермическая граница», «теплоизолированная граница»?
3. Внесите изменения в формулу (3.38) для точного решения задачи теплопроводности, если температура нижней границы будет равна 10°. Все остальные условия остаются неизменными.
4. Запишите точное решение задачи теплопроводности в прямоугольной области (см. рис. 3.19) при следующих граничных условиях: границы I и III теплоизолированы, температура границы II равна 20°, температура границы IV равна 80°. Нарисуйте изолинии с шагом изменения температуры 10°.

3.3.2. Численная модель решения задачи теплопроводности

Далеко не всегда удается получить точное решение задачи о распределении температур в виде функции $T(x,\ y)$. Проблемы возникают, когда расчетная область имеет сложную форму или граничные условия не такие простые, как в рассмотренном выше примере. Для решения таких задач применяются *приближенные методы решения*. Если приближенный метод позволяет получить решение в дискретном числовом виде, то такой метод называется *численным методом*. Рассмотрим численный метод реше-

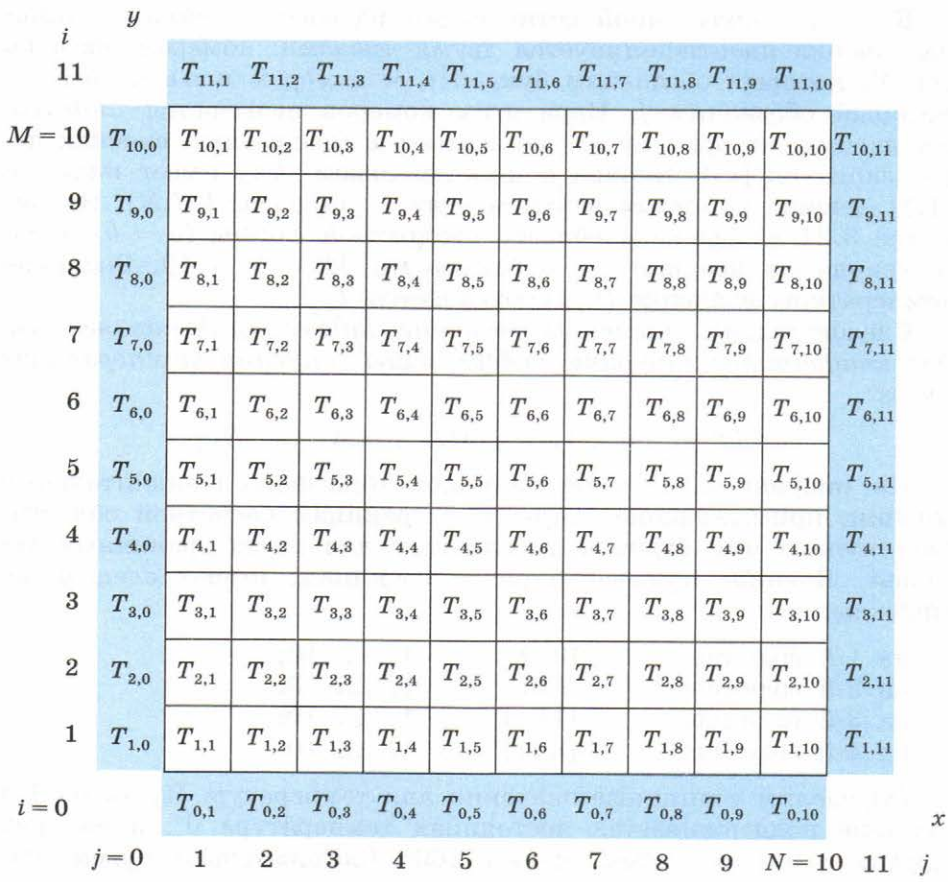


Рис. 3.21. Область решения задачи. Дискретное сеточное представление решения

ния задачи о распределении температуры, который называется *методом сеток*.

По-прежнему будем рассматривать прямоугольное сечение стержня размером $a \times b$. На область решения задачи накладывается прямоугольная сетка, как показано на рис. 3.21. Шаги сетки по осям X и Y могут быть разными. Мы рассмотрим вариант, при котором шаги по осям X и Y одинаковы. Обозначим величину шага буквой h. Число шагов по оси X на отрезке от $x = 0$ до $x = a$ обозначим буквой N, а число шагов по Y от $y = 0$ до $y = b$ — буквой M. Отсюда следует, что

$$h = \frac{a}{N} = \frac{b}{M} .$$

Клетки в полученной сетке будем называть *ячейками*. Каждая ячейка идентифицируется двумя числами: номером шага по оси Y, который обозначим буквой i, и номером шага по оси X, который обозначим j. Пара этих номеров называется *индексами ячейки*, которые будем записывать в квадратных скобках через запятую: $[i,j]$. Ячейка в нижнем левом углу имеет индексы [1,1], ячейка в правом верхнем углу — индексы $[M,N]$. На рисунке 3.21 изображена область квадратной формы ($a = b$) и наложенная на нее сетка с параметрами $M = N = 10$. Значение температуры в ячейке $[i,j]$ обозначается $T_{i,j}$.

Следовательно, *численное решение задачи представляет собой квадратную матрицу, содержащую значения температуры ячеек*:

$$\{T_{i,j}\}, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, N.$$

На рисунке 3.21 серой заливкой отмечены дополнительные ячейки, примыкающие снаружи к границам расчетной области. Они нужны нам будут в дальнейшем для учета граничных условий. Ячейки, примыкающие к границам, имеют следующие индексы:

на 1-й границе: $[0,j]$, $j = 1, \ldots, 10$;
на 2-й границе: $[i,0]$, $i = 1, \ldots, 10$;
на 3-й границе: $[11,j]$, $j = 1, \ldots, 10$;
на 4-й границе: $[i,11]$, $i = 1, \ldots, 10$.

Определим граничные значения для температур. Пусть на 1-й границе поддерживается постоянная температура 0°, а на трех других границах — температура 100°. Следовательно, будем считать, что:

$$T_{0,j} = 0, \quad T_{11,j} = 100, \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, 10;$$
$$T_{i,0} = T_{i,11} = 100, \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, 10.$$

А теперь сформулируем основное моделирующее предположение! Будем считать, что *в пределах каждой ячейки установившаяся температура является постоянной величиной*. Это означает, что температура между соседними ячейками меняется скачками. На самом деле с изменением координат температура изменяется непрерывным образом. Сделанное нами моделирующее предположение будет тем ближе к реальной физической ситуации, чем меньше размер ячейки, т. е. чем гуще сетка, накладываемая на область решения задачи.

Получим формулу для расчета $T_{i,j}$ *исходя из закона сохранения энергии*. Рассмотрим отдельную ячейку, как показано на рис. 3.22. Температура в ячейке равна $T_{i,j}$. Данная ячейка имеет общие границы с четырьмя соседними ячейками, температуры которых равны: $T_{i-1,j}$, $T_{i+1,j}$, $T_{i,j-1}$, $T_{i,j+1}$.

	$T_{i+1,j}$	
$T_{i,j-1}$	$T_{i,j}$	$T_{i,j+1}$
	$T_{i-1,j}$	

Рис. 3.22. Температура в соседних ячейках

Между соседними ячейками происходит теплообмен, мерой которого является *теплопоток* — количество теплоты, переносимое через границу за единицу времени. По закону теплофизики величина теплопотока пропорциональна разности температур ячеек, поэтому величина теплопотока, протекающего через границу от ячейки $[i-1,j]$ к ячейке $[i,j]$, равна: $K \cdot (T_{i-1,j} - T_{i,j})$. Здесь K — коэффициент пропорциональности, который зависит от теплопроводных свойств материала и размера (площади) границы, разделяющей ячейки. Для всех границ ячеек значение K будет одинаковым благодаря тому, что ячейки квадратные.

Если $T_{i-1,j} > T_{i,j}$, то теплопоток положительный (тепло втекает в ячейку $[i,j]$). Если $T_{i-1,j} < T_{i,j}$, то теплопоток отрицательный, т. е. тепло вытекает из ячейки $[i,j]$. Если температуры равны, то теплопоток равен нулю.

Поскольку температура ячейки не изменяется, значит, ее тепловая энергия остается постоянной. Закон сохранения энергии для ячейки можно сформулировать так: сколько теплоты втекает в ячейку, столько и вытекает. Отсюда следует, что суммарное количество теплоты, передаваемое через границы ячейки, равно нулю. Просуммируем теплопотоки к ячейке $[i,j]$ через ее четыре границы и приравняем эту сумму к нулю:

$$K \cdot (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + K \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + K \cdot (T_{i,j-1} - T_{i,j}) + K \cdot (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = 0.$$

Это уравнение справедливо для всех ячеек сетки:

$$i = 1, \ldots, M; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Если разделить уравнение на K и привести подобные члены, то получим:

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0.$$

Отсюда следует:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}),\ (i = 1,\ \ldots,\ M;\ j = 1,\ \ldots,\ N). \quad (3.39)$$

Смысл полученной формулы следующий: *значение установившейся температуры в каждой ячейке равно среднему арифметическому значений температур в четырех пограничных с ней ячейках.*

Формула (3.39) представляет собой систему, состоящую из $M \times N$ линейных алгебраических уравнений. Запишем одно уравнение из этой системы, соответствующее значениям $i = 1$, $j = 1$, т. е. нижней левой ячейке.

$$T_{1,1} = \frac{1}{4}(T_{0,1} + T_{2,1} + T_{1,0} + T_{1,2}).$$

Здесь два слагаемых $T_{0,1}$ и $T_{1,0}$ относятся к граничным ячейкам, значения которых известны из граничных условий. Для описанных выше граничных условий получим:

$$T_{1,1} = \frac{1}{4}(0 + T_{2,1} + 100 + T_{1,2}).$$

Следовательно, в этом уравнении остаются только три неизвестных: $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, $T_{1,2}$. Во всех уравнениях, относящихся к приграничным ячейкам, имеются слагаемые с известными (граничными) значениями. Система уравнений (3.39) содержит $M \times N$ уравнений и столько же неизвестных. Такая система называется полной, и у нее имеется единственное решение.

Метод итераций

Перепишем еще раз систему уравнений для решения задачи теплопроводности в квадратной области на сетке, размером $M = 10$, $N = 10$.

$$T_{0,j} = 0 \quad (j = 1,\ \ldots,\ 10);$$
$$T_{11,j} = 100 \quad (j = 1,\ \ldots,\ 10);$$
$$T_{i,0} = 100 \quad (i = 1,\ \ldots,\ 10);$$
$$T_{i,11} = 100 \quad (i = 1,\ \ldots,\ 10);$$
$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})\ (i = 1,\ \ldots,\ 10;\ j = 1,\ \ldots,\ 10). \quad (3.40)$$

Это система из 100 линейных алгебраических уравнений, содержащая 100 неизвестных величин: $\{T_{i,j}\}$, $i = 1,\ \ldots,\ 10$, $j = 1,\ \ldots,\ 10$. Существуют разнообразные методы решения таких систем. Мы здесь воспользуемся методом, который называется **методом итераций**.

Слово «итерации» означает «последовательные приближения». Алгоритм итераций следующий. Задается некоторое начальное приближение к искомому решению. Будем называть его нулевым приближением и записывать так: $\left\{T_{i,j}^{(0)}\right\}$. Здесь и далее число вверху в круглых скобках будет обозначать номер приближения. На основании нулевого приближения по некоторой итерационной формуле вычисляется первое приближение: $\left\{T_{i,j}^{(2)}\right\}$. Затем вычисляется второе приближение: и т. д. С увеличением номера итерации получаемые решения должны все больше приближаться к точному решению задачи. Если это происходит, то говорят, что итерационный процесс сходится. В таком случае вычисление последовательных приближений можно продолжать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

Для сходимости итерационного процесса система уравнений (3.40) должна удовлетворять определенным условиям. Мы не будем здесь разбирать вопрос об условии сходимости метода итераций. Скажем только, что система уравнений (3.40) таким условиям удовлетворяет.

Теперь запишем итерационную формулу. Для каждого уравнения из системы (3.40) эта формула выглядит следующим образом:

$$T_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(T_{i-1,j}^{(k-1)} + T_{i+1,j}^{(k-1)} + T_{i,j-1}^{(k-1)} + T_{i,j+1}^{(k-1)}\right), \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (3.41)$$

здесь k — номер итерации (приближения).

Для того чтобы начать итерационные вычисления, нужно задать начальное (нулевое) приближение. Существует доказательство того факта, что если выполняется условие сходимости метода итераций, то *вычислительный процесс сойдется к решению системы от любого начального приближения*. Например, в качестве начального приближения можно задать нулевые значения температуры во всех внутренних ячейках сетки:

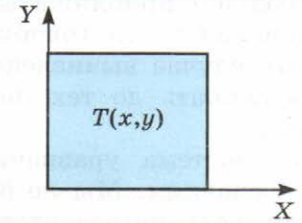
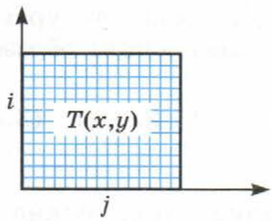
$$T_{i,j}^{(0)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, 10;\ j = 1, \ldots, 10). \qquad (3.42)$$

Далее последовательно по формуле (3.41) для всех ячеек сетки производится вычисление первого приближения, затем второго и т. д. Итерационный процесс завершается, когда для каждой ячейки разность между значениями температуры, полученными на последней и предпоследней итерациях, станет по абсолютной величине меньше заданной малой величины ε. Это условие запишем так:

$$\left|T_{i,j}^{(k)} - T_{i,j}^{(k-1)}\right| < \varepsilon \text{ для любых } (i = 1,\ \ldots,\ 10;\ j = 1,\ \ldots,\ 10). \qquad (3.43)$$

Например, если мы хотим, чтобы в процессе итерации во всех ячейках сетки в вычисленных значениях температуры установились 4 цифры после запятой, то достаточно принять $\varepsilon = 10^{-4}$.

Система основных понятий

Задача теплопроводности	
Постановка задачи для двумерной области	
	Дано: • замкнутая двумерная теплопроводная область; • заданы тепловые условия на границе. Получить распределение температуры внутри области: $T(x,y)$
Численный метод решения — метод сеток	
	• наложение прямоугольной сетки на область решения; • дискретное представление температуры: $T_{i,j}$; • численная модель на основании закона сохранения энергии (для квадратных ячеек): $T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1});$ • метод итерации для решения системы уравнений: $T_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j}^{(k-1)} + T_{i+1,j}^{(k-1)} + T_{i,j-1}^{(k-1)} + T_{i,j+1}^{(k-1)})$

Вопросы и задания

1. В каком виде ищется решение задачи теплопроводности при использовании метода сеток?
2. Как идентифицируются ячейки сетки?
3. Какой физический закон используется при построении числовой модели для расчета распределения температуры?
4. Математическая модель, полученная для задачи теплопроводности, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Какое количество уравнений и неизвестных она содержит?
5. Какой метод применяется для решения полученной системы уравнений?

6. Что такое итерации? Каким можно задать начальное приближение для температуры?
7. Когда следует закончить итерационные вычисления?
8. Получите численную модель решения задачи теплопроводности для случая неквадратной сетки (отношение шагов не равно единице).

3.3.3. Вычислительные эксперименты в электронной таблице по расчету распределения температуры

Итерации в электронных таблицах

Уже не однажды вы убеждались в том, что электронные таблицы — это мощное вычислительное средство! Сейчас вы откроете для себя еще одну возможность электронных таблиц: их применение для решения задачи теплопроводности методом итераций.

В современных табличных процессорах, таких как Microsoft Excel, заложена возможность автоматической реализации итераций. Суть ее в следующем: имеются две ячейки электронной таблицы, назовем их 1-я и 2-я ячейки. Если в 1-й ячейке записана формула, содержащая ссылку на 2-ю ячейку, а формула во 2-й ячейке содержит ссылку на 1-ю ячейку, то такая ситуация называется *циклической ссылкой*. Наличие циклической ссылки табличный процессор воспринимает как указание к выполнению итераций. Значения формул в этих ячейках начинают многократно по очереди пересчитываться. Пересчет продолжается до тех пор, пока в данных ячейках не установятся значения с заданной точностью. Эта точность определяется *относительной погрешностью итераций*.

Обозначим относительную погрешность итераций символом $\delta_{итер}$, значение формулы в 1-й ячейке на k-й итерации обозначим $F_1^{(k)}$, во второй ячейке — $F_2^{(k)}$. Значения формул в тех же ячейках на предыдущем шаге итераций, соответственно: $F_1^{(k-1)}$ и $F_2^{(k-1)}$. Относительные погрешности итераций на k-м шаге в этих ячейках равны:

$$\delta_1 = \frac{|F_1^{(k)} - F_1^{(k-1)}|}{|F_1^{(k)}|},\ \delta_2 = \frac{|F_2^{(k)} - F_2^{(k-1)}|}{|F_2^{(k)}|}.$$

Относительная погрешность итерации оценивает долю, которую составляет разность между значениями F на двух последовательных приближениях в самой величине F. Относительная погрешность выражается как в долях единицы, так и в процентах. Например: $\delta = 0{,}01 = 1\%$. Табличный процессор завершит автоматические итерации при выполнении условий: $\delta_1 < \delta_{итер}$, $\delta_2 < \delta_{итер}$.

Кроме относительной погрешности итераций есть еще и другой параметр, управляющий итерационными вычислениями. Он называется максимальным числом итераций. Назовем его $MAX_{итер}$. Если заданная относительная погрешность еще не достигнута, но число итераций достигло заданной величины $MAX_{итер}$, то итерационный пересчет формул прекращается. Данное условие предотвращает *зацикливание* вычислений. Возможна такая ситуация, когда относительная погрешность итерации задана слишком малой величиной, а из-за погрешности машинных вычислений, которая для вещественных чисел всегда имеет место (о чем рассказывалось в параграфе 2.4.2 учебника для 10 класса), требуемая точность не может быть достигнута. Тогда итерационный пересчет будет продолжаться бесконечно, если его не ограничить по числу итераций.

В табличном процессоре Microsoft Excel настройка параметров итераций производится через команды меню: **Сервис** → **Параметры** — вкладка **Вычисления** (рис. 3.23).

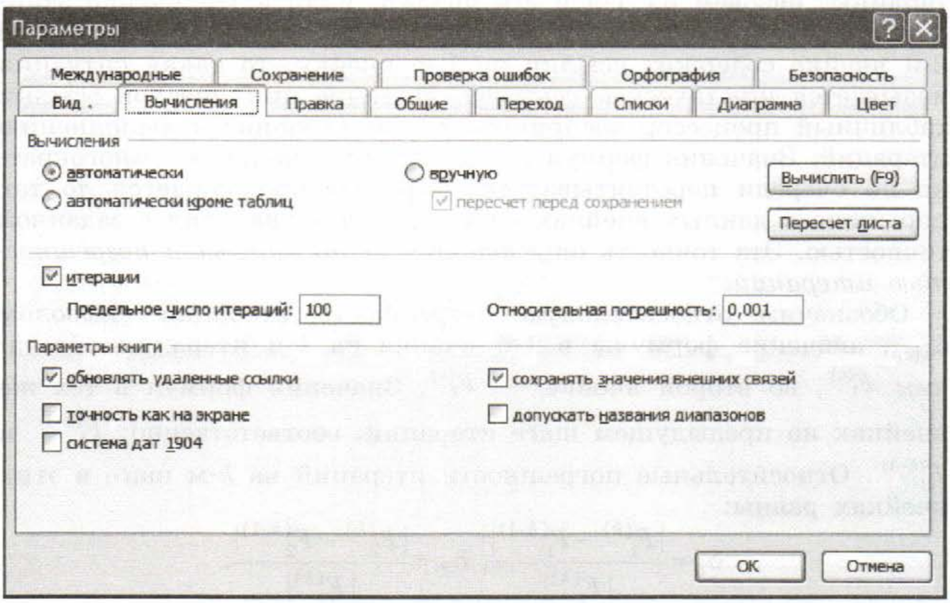


Рис. 3.23. Настройка параметров интераций

В открывшемся окне нужно включить флажок *итерации* и установить значения предельного числа итераций и относительной погрешности. Согласно рис. 3.23, $MAX_{итер} = 100$, $\delta_{итер} = 0{,}001 = 0{,}1\%$.

Вычислительный эксперимент 1: границы с постоянной температурой

Как уже говорилось раньше, распределение температур определяется тепловыми условиями на границе. Проведем первый вычислительный эксперимент при заданных значениях температур на всех четырех границах области, как это было описано в предыдущем параграфе: на верхней, левой и правой границах поддерживается температура 100 °C, на нижней границе — 0 °C.

Рассмотрим последовательность действий с электронной таблицей для реализации итерационного решения задачи теплопроводности.

1. В приграничные ячейки занесем граничные значения, как показано на рис. 3.24.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Y											
2	11		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
3	10	100											100
4	9	100											100
5	8	100											100
6	7	100											100
7	6	100											100
8	5	100											100
9	4	100											100
10	3	100											100
11	2	100											100
12	1	100											100
12	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Рис. 3.24. Установка граничных значений

Следующим шагом в ячейки электронной таблицы, соответствующие внутренним ячейкам стержня, нужно занести начальные нулевые значения. Однако специально делать это не требуется, поскольку по умолчанию табличный процессор автоматически заносит во все ячейки нули. Это общее правило, выполняемое всеми табличными процессорами.

2. Теперь следует занести в ячейки таблицы расчетные формулы согласно (3.41). Для этого нужно:

1) записать в ячейку C3 следующую формулу:
=(B3+D3+C2+C4)/4

2) скопировать эту формулу во все ячейки диапазона C3:L12.

Если режим итераций настроен, то через короткий промежуток времени в ячейках сетки установятся расчетные значения температуры, как показано на рис. 3.25.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Y											
2	11		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
3	10	100	98,10	96,36	94,93	93,92	93,40	93,40	93,92	94,93	96,36	98,09	100
4	9	100	99,09	98,25	97,57	97,08	96,83	96,83	97,08	97,57	98,25	99,09	100
5	8	100	96,94	94,15	91,88	90,28	89,46	89,46	90,28	91,88	94,15	96,94	100
6	7	100	95,50	91,43	88,15	85,86	84,69	84,69	85,86	88,14	91,43	95,50	100
7	6	100	93,63	87,94	83,41	80,32	78,75	80,32	83,41	87,94	98,25	93,63	100
8	5	100	91,07	83,27	77,25	73,24	71,25	71,25	73,24	77,25	83,27	91,07	100
9	4	100	87,38	76,82	69,09	64,15	61,76	61,76	64,15	69,09	76,82	87,38	100
10	3	100	81,62	67,55	58,13	52,50	49,89	49,89	52,50	58,13	67,55	81,62	100
11	2	100	71,54	53,65	43,37	37,83	35,40	35,40	37,83	43,37	53,64	71,54	100
12	1	100	50,91	32,11	23,88	20,05	18,48	18,48	20,05	23,88	32,11	50,91	100
13	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Рис. 3.25. Результаты расчета поля температур

Таблица на рис. 3.25 — это и есть искомое решение задачи! Дальше его можно анализировать. Например, используя мастер диаграмм табличного процессора, можно строить графики изменения температур в любых сечениях по осям X и Y.

На рисунке 3.26 показаны графики распределения температур по оси X в горизонтальных сечениях (при постоянных значениях y), соответствующих рядам сетки при $j = 1$ (рис. 3.26, *а*) и $j = 6$ (рис. 3.26, *б*). На рис. 3.26, *в* приведена поверхностная диаграмма, которую также можно построить с помощью мастера диаграмм. Здесь функция $T(x, y)$ представлена в виде поверхности, построенной по рассчитанным в таблице (см. рис. 3.25) точкам. Оси X и Y лежат в горизонтальной плоскости, ось температуры T направлена вертикально вверх. Интерпретация такой диаграммы достаточно очевидна: чем выше точка на поверхности, тем более

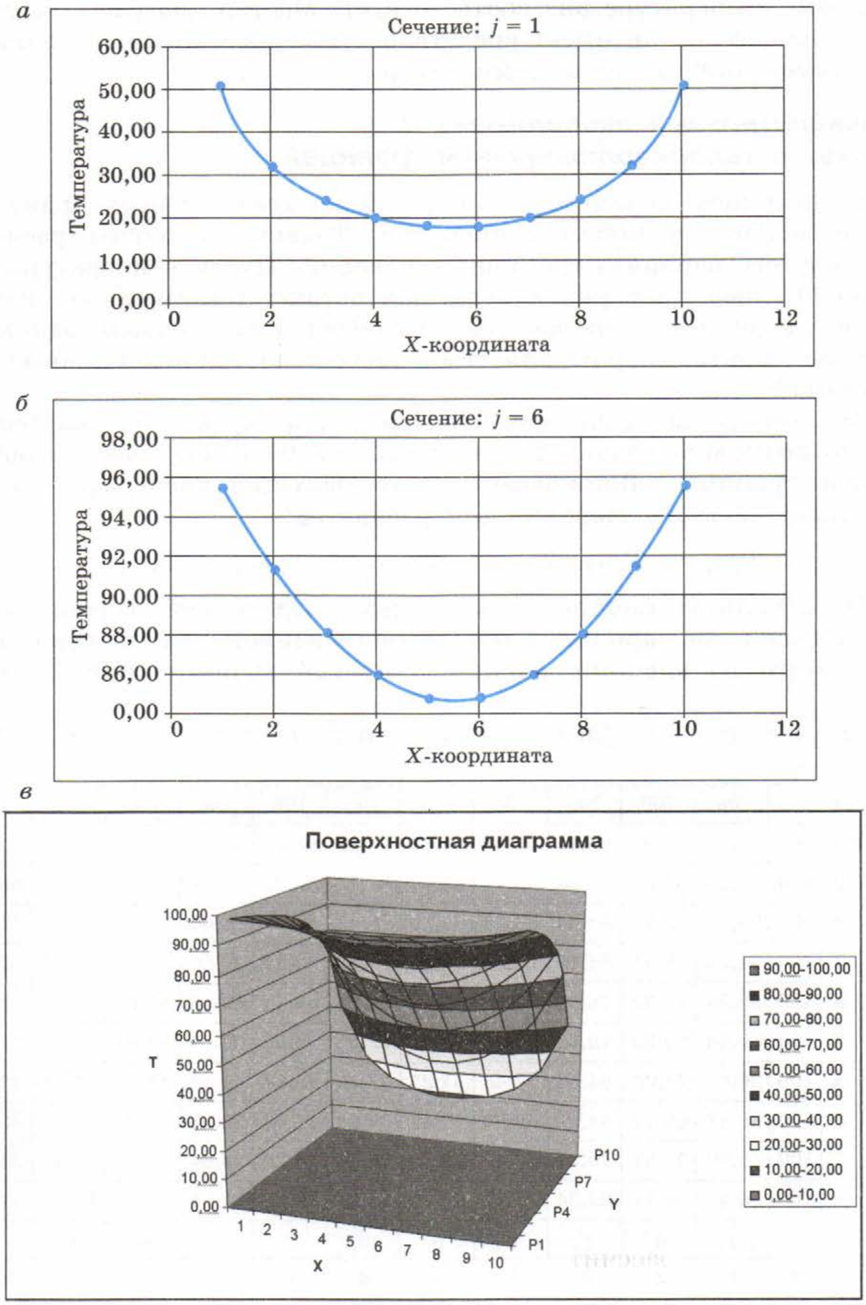


Рис. 3.26. Графическая обработка результатов вычислительного эксперимента 1

высокой температуре она соответствует. Мастер диаграмм табличного процессора не имеет средств построения картины изолиний для рассчитанного поля температур.

Вычислительный эксперимент 2: расчет с теплоизолированной границей

В предыдущем варианте вычислений на всех четырех границах были заданы значения температур. Теперь выполним расчеты для другого варианта граничных условий. Пусть температуры на нижней, левой и верхней границах остаются такими же, как в первом варианте, а *правую границу сделаем теплоизолированной*. Как же задать условие для температуры на теплоизолированной границе?

Теплоизоляция означает, что через границу нет потока тепла. А это возможно только тогда, когда температуры ячеек с обеих сторон границы одинаковые (см. предыдущий параграф). Следовательно, должны выполняться равенства:

$$T_{1,10} = T_{1,11},\ T_{2,10} = T_{2,11}, \ldots,\ T_{10,10} = T_{10,11}.$$

Электронную таблицу с решением предыдущей задачи легко перестроить на вариант с теплоизолированной правой границей. Для этого во внешние ячейки у правой границы нужно внес-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Y											
2	11		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
3	10	100	98,73	97,52	96,41	95,44	94,62	93,95	93,44	93,07	92,83	92,71	92,71
4	9	100	97,40	97,52	92,68	90,71	89,07	87,75	86,73	85,99	85,52	85,29	85,29
5	8	100	95,95	92,11	88,65	85,66	83,19	81,22	79,22	78,65	77,95	77,62	77,62
6	7	100	94,28	88,91	84,13	80,09	76,80	74,22	72,27	70,90	70,02	69,59	69,59
7	6	100	92,26	85,09	78,88	73,75	69,67	66,55	64,24	62,63	61,61	61,11	61,11
8	5	100	89,66	80,33	72,52	66,33	61,58	58,05	55,50	53,74	52,65	52,12	52,12
9	4	100	86,04	74,02	64,55	57,45	52,27	48,55	45,94	44,18	43,10	42,58	42,58
10	3	100	80,47	65,14	54,21	46,65	41,47	37,93	35,52	33,93	32,97	32,51	32,51
11	2	100	70,70	51,87	40,47	33,47	29,03	26,15	24,26	23,04	22,31	21,97	21,97
12	1	100	50,47	31,17	22,34	17,71	115,03	13,38	12,32	11,66	11,26	11,08	11,08
13	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Рис. 3.27. Результаты расчета поля температур с теплоизолированной правой границей

ти следующие формулы: в ячейку М3: =L3, в ячейку М4: =L4 и т. д., в ячейку М12: =L12. На рисунке 3.27 показан вид таблицы после выполнения вычислений.

Нетрудно заметить, что распределение температуры изменилось по сравнению с первым вариантом. На рисунке 3.28 показаны зависимости температуры от координаты x в разных горизонтальных сечениях по оси Y. Видно, что вблизи нагревающей стенки температура меняется быстро, а с приближением к теплоизолированной границе изменение температуры замедляется. А значения температур в ячейках слева и справа от 4-й границы равны между собой. Еще раз повторим, что это связано с условием теплоизоляции данной границы.

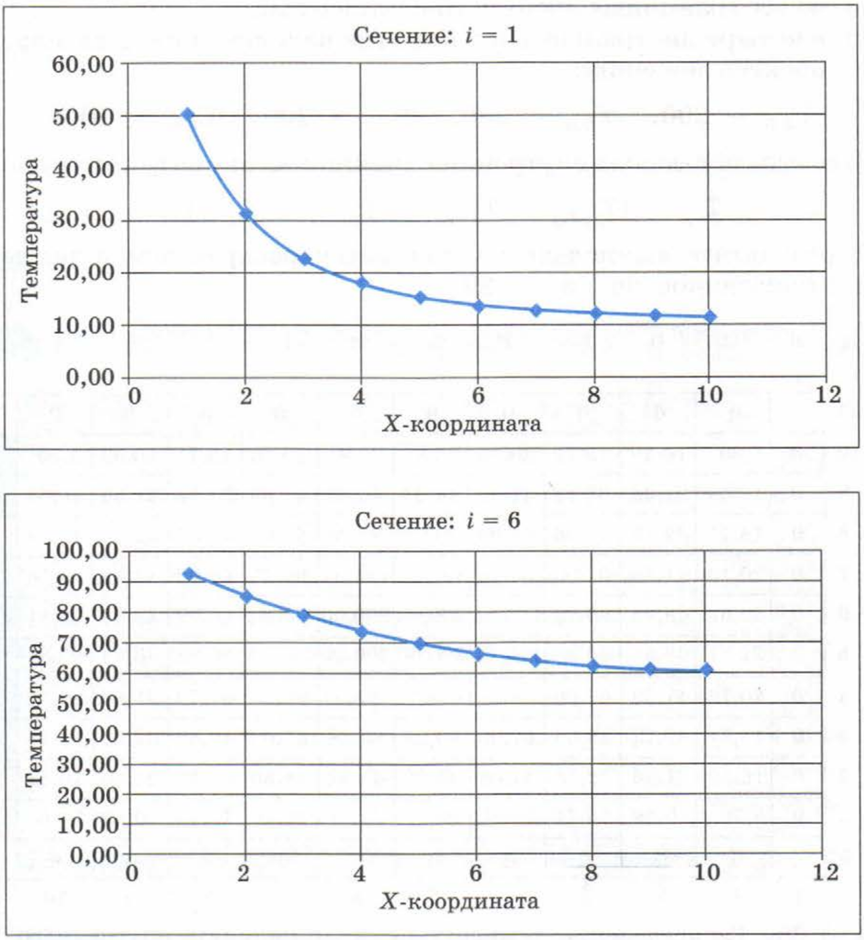


Рис. 3.28. Распределения температуры в разных сечениях по оси Y

Вычислительный эксперимент 3: расчет с внутренним источником тепла

Теперь выполним расчет для следующей задачи: на всех границах поддерживается одинаковая температура 0 °С (температура внешней среды). В центре области расположен нагреватель. Например, это может быть изолированный электрический проводник, через который пропускается ток, в результате чего проводник нагревается. Пусть в нашей модели нагреватель занимает четыре центральные ячейки: [5,5], [5,6], [6,5], [6,6] и температура в этих ячейках будет постоянной и равной 200 °С.

Построение электронной таблицы для расчета производится в следующем порядке:

1) во все граничные ячейки заносятся нули;
2) в четыре центральные ячейки, где находится нагреватель, заносятся значения:

$$T_{5,5} = 200, \quad T_{5,6} = 200, \quad T_{6,5} = 200, \quad T_{6,6} = 200;$$

3) во всех остальных внутренних ячейках остаются формулы вида:

$$T_{i,j} = (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1})/4.$$

В результате вычислений установится распределение температуры, показанное на рис. 3.29.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Y											
2	11		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	10	0	5,30	10,59	15,71	20,10	22,81	22,81	20,10	15,71	10,59	5,30	0
4	9	0	10,59	21,36	32,13	41,89	48,33	48,33	41,89	32,13	21,36	10,59	0
5	8	0	15,71	32,13	49,56	67,00	80,28	80,28	67,00	49,56	32,13	15,71	0
6	7	0	20,10	41,89	67,00	96,25	125,51	125,51	96,25	67,00	41,89	20,10	0
7	6	0	22,81	48,33	80,28	125,51	**200,00**	**200,00**	125,51	80,28	48,33	22,81	0
8	5	0	22,81	48,33	80,28	125,51	**200,00**	**200,00**	125,51	80,28	48,33	22,81	0
9	4	0	20,10	41,89	67,00	96,25	125,51	125,51	96,25	67,00	41,89	20,10	0
10	3	0	15,71	32,13	49,56	67,00	80,28	80,28	67,00	49,56	32,13	15,71	0
11	2	0	10,59	21,36	32,13	41,89	48,32	48,32	41,89	32,13	21,36	10,59	0
12	1	0	5,30	10,59	15,71	20,10	22,81	22,81	20,10	15,71	10,59	5,30	0
13	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Рис. 3.29. Распределение температуры при наличии внутреннего подогрева

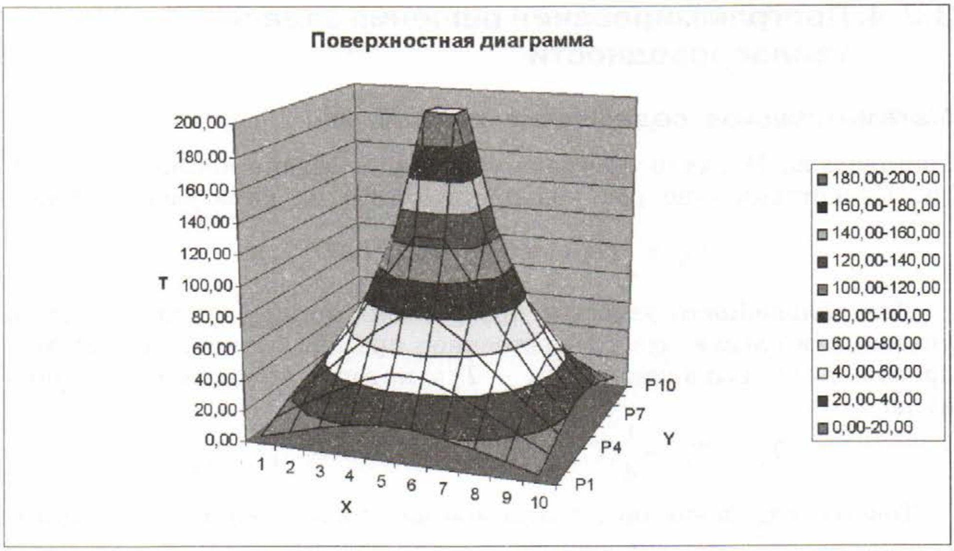


Рис. 3.30. Диаграмма распределения температуры от внутреннего источника

Полученное распределение температуры носит центрально симметричный характер. Если строить изотермы, то они будут представлять собой окружности, в центре которых — ячейки с источником тепла. На рисунке 3.30 показана поверхностная диаграмма полученной зависимости $T(x, y)$. На ней хорошо иллюстрируется симметричность распределения температуры.

Вопросы и задания

1. Каким образом в электронных таблицах организуются итерационные вычисления?
2. С помощью каких параметров происходит управление итерационными вычислениями?
3. Опишите последовательность действий при реализации в электронной таблице вычислительного эксперимента по расчету распределения температуры.
4. Как в электронной таблице обеспечивается выполнение условия постоянства температуры на границе?
5. Как в электронной таблице обеспечивается условие теплоизоляции границы?
6. Как в электронной таблице моделируются внутренние источники тепла?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.3.4. Программирование решения задачи теплопроводности

Математическое содержание программы

Составим на Паскале программу решения задачи теплопроводности. Перепишем еще раз уравнение (3.39) из параграфа 3.3.2:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}).$$

Для дальнейшего удобства программирования выполним с этим уравнением следующее тождественное преобразование: прибавим к правой части выражение: $T_{i,j} - T_{i,j}$, которое тождественно равно нулю:

$$T_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) - T_{i,j}.$$

Теперь если последнее слагаемое внести в скобки, то получим:

$$T_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{4}(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j})$$

$$(i = 1,\ldots,\ 10;\quad j = 1,\ldots,\ 10). \qquad (3.44)$$

Смысл такого преобразования будет разъяснен чуть позже. Запишем расчетную формулу метода итераций для решения системы уравнений (3.44):

$$T_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k-1)} + \frac{1}{4}(T_{i-1,j}^{(k-1)} + T_{i+1,j}^{(k-1)} + T_{i,j-1}^{(k-1)} + T_{i,j+1}^{(k-1)} - 4T_{i,j}^{(k-1)})$$

$$(i = 1,\ldots,\ 10;\quad j = 1,\ldots,\ 10). \qquad (3.45)$$

Внесем еще одно изменение в полученную формулу (3.45). Нетрудно понять, что в программе вычислений по формуле (3.45) значения $T_{i,j}$ будут представлены в двумерном массиве, где индекс i — номер строки, j — номер столбца. Договоримся, что в программе перебор элементов матрицы при вычислении по формуле (3.45) будет осуществляться построчно, т. е. во внешнем цикле — по возрастанию индекса i, во внутреннем цикле — по возрастанию индекса j. Отсюда следует, что к моменту вычисления элемента $T_{i,j}$ на k-м шаге итераций значения элементов $T_{i-1,j}$ и $T_{i,j-1}$ оказываются уже вычисленными на этом же итерационном шаге. Если все они хранятся в одном массиве, то с учетом всего сказанного формула (3.45) преобразуется к следующему виду:

$$T_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k-1)} + \frac{1}{4}(T_{i-1,j}^{(k)} + T_{i+1,j}^{(k-1)} + T_{i,j-1}^{(k)} + T_{i,j+1}^{(k-1)} - 4T_{i,j}^{(k-1)}),$$

$$(i = 1,\ldots,\ 10;\quad j = 1,\ldots,\ 10). \qquad (3.46)$$

Такая модификация метода итераций в численных методах носит название *метода Зейделя*. Она, как правило, ускоряет процесс сходимости итераций, благодаря чему сокращается время вычислений. Кроме того, сокращается расход памяти компьютера, поскольку нет необходимости в использовании дополнительного массива для хранения значений матрицы T на предыдущем шаге итераций.

А теперь вернемся к вопросу о том, зачем было выполнено преобразование от формулы (3.39) к тождественной ей формуле (3.44). Ответ на этот вопрос становится понятным из формулы (3.46). Перепишем ее в таком виде:

$$T_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k-1)} + DT_{i,j}^{(k)}, \tag{3.47}$$

где $DT_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4}(T_{i-1,j}^{(k)} + T_{i+1,j}^{(k-1)} + T_{i,j-1}^{(k)} + T_{i,j+1}^{(k-1)} - 4T_{i,j}^{(k-1)})$.

Здесь в явном виде выделено приращение к предыдущему приближению, в результате прибавления которого получается следующее приближение. Отсюда окончание итерационного процесса в программе будет реализовано следующим образом. Пусть ε — заданная малая величина, определяющая абсолютную погрешность итераций. Тогда итерационный процесс нужно завершать на k-м шаге итераций, на котором для всех значений $T_{i,j}$ выполнится условие:

$$|DT_{i,j}^{(k)} \le \varepsilon| \quad (i = 1, \ldots, 10;\ j = 1, \ldots, 10).$$

Комментарий к программе

Ниже приведена программа на Паскале решения задачи теплопроводности в квадратной двумерной области. Данная программа составлена для варианта изотермических граничных условий. Использованы следующие обозначения:

$T1$ — постоянная температура 1-й границы;
$T2$ — постоянная температура 2-й границы;
$T3$ — постоянная температура 3-й границы;
$T4$ — постоянная температура 4-й границы.

Переменная *eps* — абсолютная погрешность итераций; *Max* — максимальное число итераций. Итерационный цикл реализован с помощью структуры цикл-пока. Логическая переменная *flag* используется в качестве признака окончания итерационного процесса в случае его сходимости. Если условие сходимости не выполнится, то цикл закончится при достижении максимально допустимого числа итераций.

Текст программы

```
Program  Teplo;
Const M=10; N=10;
Var i, j, k, Max: integer;
    T: array[0..M+1, 0..N+1] of real; {Массив температур}
    T1, T2, T3, T4, eps, DT: real;
    flag: boolean;
begin
  //Ввод исходных данных
  Write('T1='); Readln(T1);
  Write('T2='); Readln(T2);
  Write('T3='); Readln(T3);
  Write('T4='); Readln(T4);
  Write('Eps='); Readln(eps);
  Write('Max='); Readln(Max);
  //Граничные условия
  for i:=1 to M do
  begin T[i,0]:=T2; T[i,N+1]:=T4 end;
  for j:=1 to N do
  begin T[0,j]:=T1; T[M+1,j]:=T3 end;
  //Начальное приближение
  for i:=1 to M do
    for j:=1 to N do T[i,j]:=0;
  flag:=True;  k:=0;
  //Итерационный цикл
  while flag and (k<Max) do
  begin
    flag:=false;
    for i:=1 to M do   {Циклы изменения индексов массива}
      for j:=1 to N do
      begin
        DT:=(T[i-1,j]+T[i+1,j]+T[i,j-1]+T[i,j+1]-4*T[i,j])/4;
        T[i,j]:=T[i,j]+DT;
        if abs(DT)>eps then flag:=True
      end;
    k:=k+1          {Изменение счетчика числа итераций}
  end;
  //Вывод результатов на экран
  for i:=M downto 1 do
  begin
    for j:=1 to N do
      Write(T[i,j]:6:2);
    Writeln
  end
end.
```

Тестирование программы

Протестируем программу, выполнив вычисления для тех же граничных условий, что в параграфе 3.3.3, в 1-м вычислительном эксперименте. После запуска программы на экране отразился следующий диалог ввода исходных данных:

```
T1=0
T2=100
T3=100
T4=100
Eps=0.0001
Max=100
```

Результаты получаются в виде прямоугольной таблицы. Они точно совпадают с числами на рис. 3.25, поэтому повторять их здесь не будем.

Графическую обработку полученных результатов можно либо самостоятельно реализовать, запрограммировав соответствующие процедуры на Паскале, либо воспользоваться одной из доступных программ научной графики, например Grapher. Для этого рассчитанный массив температур следует записать в файл и затем ввести его из файла в качестве исходных данных при выполнении графической программы.

Система основных понятий

Реализация на компьютере решения задачи теплопроводности	
В электронной таблице	**Путем программирования**
Итерации реализуются с помощью циклических ссылок. Параметры управления итерациями: относительная погрешность, предельное число итераций Последовательность реализации вычислений: 1) расстановка граничных условий во внешние приграничные ячейки; 2) заполнение внутренних ячеек расчетными формулами. Вычисления происходят автоматически. Графическая обработка с помощью мастера диаграмм: распределение температуры в сечениях области, поверхностные диаграммы	Используется итерационный метод Зейделя, ускоряющий вычисления. На каждом шаге итераций вычисляется приращение к предыдущему приближению. Итерационный цикл повторяется, пока приращение во всех ячейках сетки больше заданной точности и число итераций не превышает заданного предельного числа. Графическая обработка результатов: а) самостоятельное составление программы графической обработки; б) обработка с помощью одной из программ научной графики (например, Grapher)

Вопросы и задания

1. В чем смысл преобразования формулы для расчета температуры в ячейке к виду (3.44)?
2. Чем отличается метод Зейделя от ранее описанного метода итераций?
3. При выполнении каких условий, согласно тексту программы, заканчивается итерационный процесс?
4. Какие нужно внести изменения в программу, если на 2-й и 4-й границах действуют условия теплоизоляции?
5. Какие нужно внести изменения в программу, чтобы выдавалось сообщение в случае, если итерационный процесс не сходится, т. е. заданная точность *Eps* не достигается?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.3.5. Программирование построения изолиний

В этом параграфе мы с вами снова вернемся к программированию получения графических изображений на Delphi. В параграфе 2.4.5 рассматривалась программа построения графика функции. На ее примере были описаны основные принципы получения графического изображения в Delphi. Теперь нашей задачей будет составление программы построения картины изолиний для поля температур.

Что такое изолинии

Рассмотрим подробнее понятие изолиний. Дадим определение изолинии.

Дана функция от двух переменных $Z(x, y)$, определенная в некоторой области значений аргументов. *Изолинией называется геометрическое место точек на плоскости XOY, соответствующее постоянному значению функции Z.*

Графическим изображением функции $Z(x, y)$ является поверхность в трехмерном пространстве. Такие поверхности, показанные на рис. 3.26, 3.30, были получены с помощью табличного процессора. Изолиния, соответствующая некоторому постоянному значению $Z = Z_c$, представляет собой проекцию линии пересечения поверхности $Z(x, y)$ плоскостью $Z = Z_c$.

В качестве примера рассмотрим сферическую поверхность радиуса R с центром в начале координат. Ее уравнение следующее:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Выразим из этого уравнения значение Z как функцию от x, y:

$$Z(x,y) = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \qquad (3.48)$$

Знак «+» соответствует верхней полусфере, знак «−» соответствует нижней полусфере. Изолиниями такой функции являются концентрические окружности с центрами в начале координат и радиусами от 0 до R. Построение одной изолинии показано на рис. 3.31.

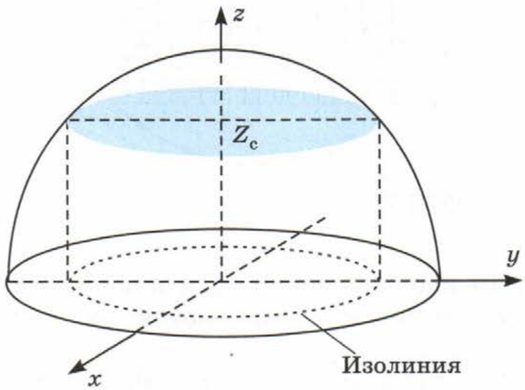


Рис. 3.31. Построение изолинии сферической поверхности

Теперь перейдем к программированию. План действий будет следующим.

1. Составим программу вычисления на прямоугольной сетке дискретных значений функции (3.48) с сохранением в файле полученного числового массива.
2. Составим программу построения картины изолиний для функции $Z(x, y)$, сохраненной в дискретном виде в файле, в результате выполнения п. 1.

Дискретное представление поверхности

Примем $R = \sqrt{2}$. Будем строить картину изолиний верхней части сферической поверхности ($Z > 0$) в пределах квадратной области $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$. Такая область будет представлять собой квадрат, вписанный в окружность, получающуюся при пересечении сферы с плоскостью XOY, как показано на рис. 3.32.

На квадратную область накладываем прямоугольную сетку размером $N \times M$, где N — число шагов по оси X, M — число шагов по оси Y. В дальнейшем будем называть ее *расчетной сеткой*. Значения шагов по осям X и Y равны соответственно:

$$h_x = 2/N, \qquad h_y = 2/M.$$

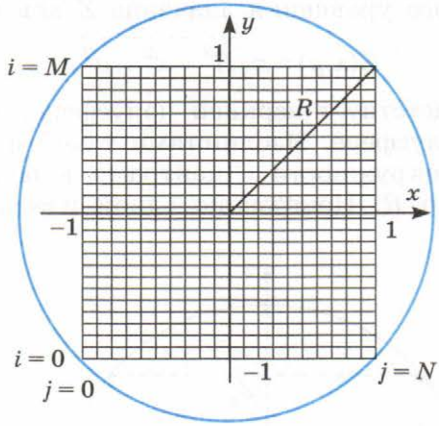


Рис. 3.32. Область построения изолиний

Если $N = M$, то шаги одинаковые и ячейки сетки квадратные.

Координаты узлов сетки вычисляются по следующим формулам:

$$x_j = -1 + jh_x, \qquad j = 0, \ldots, N;$$

$$y_i = -1 + ih_y, \qquad i = 0, \ldots, M.$$

Для получения дискретного представления верхней половины сферической поверхности в каждом узле сетки вычисляется значение функции Z по формуле (3.48). Получим расчетную формулу:

$$Z(x_j, y_i) = \sqrt{2 - x_j^2 - y_i^2}\ . \qquad (3.49)$$

Множество значений функции Z образует матрицу $\{Z_{i,j}\}$, $i = 0, \ldots, M$, $j = 0, \ldots, N$.

Программа расчета сферической поверхности

Ниже приведена программа на Паскале для расчета поверхности верхней полусферы.

```
Program  Polusfera;
Const M = 50; N = 50;//Параметры размера сетки
Var i, j: integer;
    Z: array[1..M,1..N] of real; //Массив расчетных значений
                                   //функции Z
    x, y, hx, hy: real;
    Flt: file of real;  //файловая переменная
```

```
begin
  Assign(Flt, 'F:\temp\Tmas.dat');  //Назначение файла
  Rewrite(Flt);                     //Открытие файла для записи
  hx:=2/N;  hy:=2/M;                //Расчет шагов по X и по Y
  //Вычисление массива Z
  for i:=1 to M do
  begin
    y:=-1+hy*i;
    for j:=1 to N do
    begin
      x:=-1+hx*j;
      Z[i,j]:=sqrt(2-x*x-y*y)
    end
  end;
  //Запись массива в файл поэлементно
  for i:=1 to M do
    for j:=1 to N do Write(Flt, Z[i,j]);
  Close(Flt);
  Writeln('Работа программы закончена')
end.
```

Новым для вас элементом в этой программе является использование типизированного файла. Чтобы вспомнить, как организуется ввод данных из файла и вывод в файл, посмотрите еще раз параграф 2.2.4 нашего учебника. Там описана работа с текстовыми файлами, которые хранят любые данные в символьном формате.

Если же требуется хранить в файле данные в том же формате, в каком они хранятся в оперативной памяти, то в таком случае используются **типизированные файлы.** Файловая переменная, связываемая с типизированным файлом, описывается так:

```
Var  <переменная>: file of <тип сохраняемых данных>
```

В рассматриваемой программе используется файловая переменная *Flt*, которая описана следующим образом:

```
Var  Flt: file of real;
```

Запись в типизированный файл производится оператором

```
Write(<файловая переменная>, <список вывода>)
```

Чтение из типизированного файла производится оператором:

```
Read(<файловая переменная>, <список ввода>)
```

При использовании типизированных файлов вместо текстовых для сохранения массива вещественных чисел обычно значительно сокращается объем получаемого файла.

Программирование построения изолиний на Delphi

Интерфейс программы построения изолиний показан на рис. 3.33. На этом рисунке отражены результаты выполнения тестовых расчетов построения изолиний сферической поверхности, о которой было рассказано выше. Числовой массив, получаемый по программе `Polusfera`, сохраняется в файле с полным именем F:\temp\Tmas.dat (путь к файлу и его имя могут быть и другими). Программа построения изолиний читает этот файл, запрашивает у пользователя число рисуемых изолиний с помощью элемента интерфейса *ComboBox1*. После нажатия командной кнопки *Button1* в поле элемента *ListBox1* выводятся номера изолиний и соответствующие им значения функции, а в прямоугольном окне рисуются изолинии, помеченные соответствующими номерами.

Как и следовало ожидать, картина изолиний сферической поверхности представляет собой концентрические окружности. Максимальное значение находится в центре, соответствует верхней точке сферы и равно $R = \sqrt{2}$.

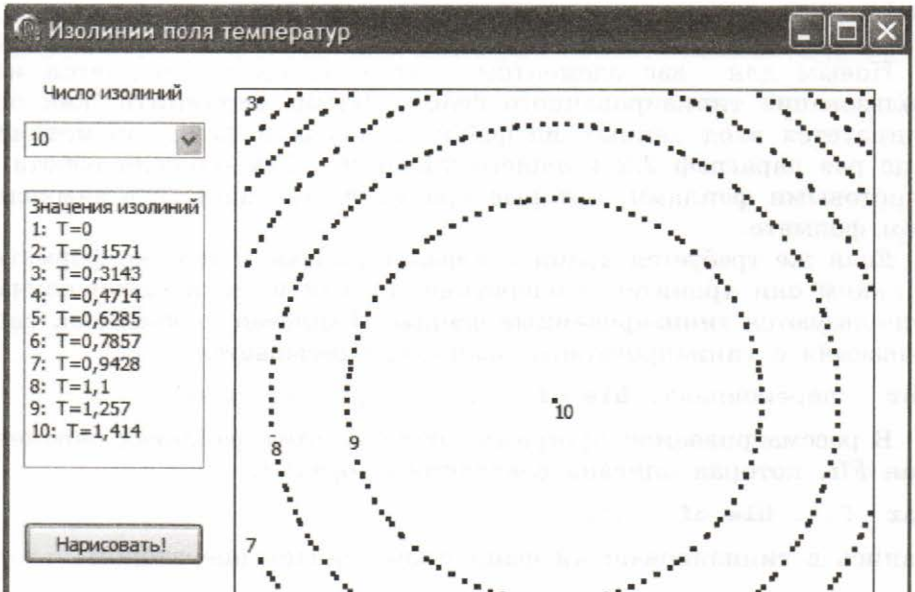


Рис. 3.33. Результат работы программы построения изолиний на тестовой задаче

Программа построения изолиний

Программа построения изолиний реализована в процедуре обработки события Button1Click.

```
Procedure Tform6.Button1Click(Sender: Tobject);
Const M = 50; N = 50;
Var T: array [1..M,1..N] of real;
    Tmax, Tmin, DT, Tlin: real;
    Nlin, i, j: integer;
    F: file of real;
Procedure IZOLIN;
Var l, b: integer;  // левый нижний угол области
                    // вывода графика
    w, h: integer;  // ширина и высота области вывода графика
    i, j, lin, k, e: integer;
    ri, rj: real;
    flag: boolean;
Procedure Pixels_9(e, k: integer);  //закрашивание
                                    //квадратика 3x3
Var i1, j1: integer;
begin
  for i1:=-1 to 1 do
    for j1:=-1 to 1 do
      Form6.Canvas.Pixels[e+i1, k+j1]:=clBlack
end;
begin
  l:=130; //Смещение вправо окна изолиний на 130 пикселей
  b:=Form6.ClientHeight-20; // Y-координата левого
                            // нижнего угла
  h:=Form6.ClientHeight-40;    // максимальная высота окна
  w:=Form6.ClientWidth-(l+20); // максимальная ширина окна
  if M>N then w:=round(w*N/M); // пропорциональное уменьшение
                               // ширины
  if M<N then h:=round(h*M/N); // или высоты
  with Form6.Canvas do
  begin
    //Границы прямоугольной области
    MoveTo (l, b-h);  LineTo(l,  b); LineTo(l+w, b);
    LineTo(l+w, b-h);  LineTo(l,b-h);

    //построение изолиний
    for lin:=1 to Nlin do
    begin
      Tlin:=Tmin+(lin-1)*DT;
      flag:=true;
      //пересечение с горизонтальными линиями сетки
      for i:=1 to M-1 do
```

```
      begin
        k:=round(h/M*(M-i)+b-h); // граф. координата по Y
        for j:=1 to N-1 do
        begin
          if (Tlin>=T[i,j]) and (T[i,j+1]>=Tlin) or
             (Tlin<=T[i,j]) and Tlin>=T[i,j+1])
          then
          Begin //x-координата точки пересечения
            if abs(T[i,j+1]-T[i,j])<1E-6 //исключение деления
                                         //на ноль
            then rj:=j+1
            else rj:=j+(Tlin-T[i,j])/(T[i,j+1]-T[I,j]);
            e:=round(l+w/N*rj);//граф. координата по X
            Pixels_9(e,k)      //Закрашивание области точки
          end
        end
      end;
      //пересечение с вертикальными линиями сетки
      for j:=1 to N-1 do
      begin
        e:=round(l+w/N*j); //граф. координата по X
        for i:=1 to M-1 do
        begin
          if (Tlin>=T[i,j]) and (Tlin<=T[i+1,j]) or
             (Tlin<=T[i,j]) and (Tlin>=T[i+1,j])
          then
          begin //y-координата точки пересечения
            if abs(T[i+1,j]-T[i,j])<1E-6
            then ri:=i+1
            else ri:=i+(Tlin-T[i,j])/(T[i+1,j]-T[i,j]);
            k:=round(h/M*(M-ri)+b-h); //граф. координата по Y
            //Вывод номера изолинии или закрашивание точки
            if flag then
            begin TextOut(e,k,IntToStr(lin)); flag:=false End
            else  Pixels_9(e,k) //Закрашивание области точки
          end
        end
      end
    end //конец цикла вывода изолиний
  end // end  With
end; //конец процедуры изолиний

begin
  AssignFile(F, 'F:\temp\Tmas.dat'); Reset(F);
  for i:=1 to M do
    for j:=1 to N do Read(F, T[i,j]); //Ввод массива
                                      //из файла
```

```
  //Вычисление max и min массива T
  Tmax:=T[1,1]; Tmin:=T[1,1];
  for i:=1 to M do
    for j:=1 to N do
    Begin
      if T[i,j]>Tmax then Tmax:=T[i,j];
      if T[i,j]<Tmin then Tmin:=T[i,j]
    end;
  //Ввод числа изолиний из поля ComboBox1
  Nlin:=StrToInt(ComboBox1.Items[ComboBox1.ItemIndex]);
  DT:=(Tmax-Tmin)/(Nlin-1); //Шаг изменение значения изолинии
  //Вывод списка изолиний в поле ListBox1
  ListBox1.Items.Add('Значения изолиний');
  for i:=1 to Nlin do
  begin
    ListBox1.Items.Add(IntToStr(i)+ ': T=' +
              FloatToStrF(Tmin+(i-1)*DT, ffGeneral, 4, 2))
  end;
  IZOLIN //Обращение к процедуре построения изолиний
end;
```

Основные идеи алгоритма. Приведенная программа подробно прокомментирована, поэтому в ней можно разобраться самостоятельно. Поясним лишь некоторые основные идеи, заложенные в алгоритм.

1. Изображение изолинии получается из точек пересечения этой линии с горизонтальными и вертикальными линиями расчетной сетки. Чем гуще расчетная сетка (чем больше $M \times N$), тем плотнее расположатся точки (рис. 3.34).

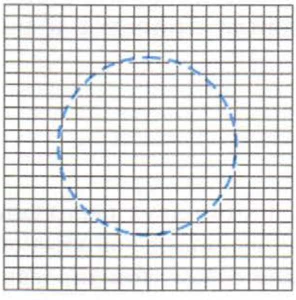


Рис. 3.34. Точечное изображение на расчетной сетке

2. Число изолиний заносится в переменную *Nlin*. Значения, соответствующие выводимым изолиниям, изменяются от мини-

мального значения в массиве ($Tmin$) до максимального значения ($Tmax$) с шагом $DT = (Tmax - Tmin)/(Nlin - 1)$.

3. Для очередного значения изолинии $Tlin$ определятся все пары ближайших узлов расчетной сетки, между которыми лежит это значение. Для горизонтальных линий сетки: $Tlin \in [T_{i,j}, T_{i,j+1}]$. Для вертикальных линий сетки $Tlin \in [T_{i,j}, T_{i+1,j}]$. Далее путем линейного приближения вычисляется положение точки пересечения изолинии с соответствующей линией сетки. Например, для горизонтальных линий сетки положение точки пересечения получается в переменной rj, которое вычисляется оператором: `rj:=j+(Tlin-T[i,j])/(T[i,j+1]-T[i,j])`. Это значение будет удовлетворять условию: $j \le rj \le j+1$. Для вертикальных линий сетки положение точки пересечения вычисляется оператором: `ri:=i+(Tlin-T[i,j])/(T[i+1,j]-T[i,j])`. Отсюда $i \le ri \le i+1$.

4. Координаты точек пересечения изолиний с линиями расчетной сетки (i, rj) или (ri, j) пересчитываются в координаты ближайших точек графической сетки в окне вывода изображения (`Canvas` — холсте). Эти координаты получаются, соответственно, в переменных `e`, `k`. Затем на холсте в этом месте закрашивается черный квадратик размером 3 × 3 пикселя. Точка с координатами (e, k) находится в центре этого квадратика. Закрашивание производится процедурой `Pixels_9`. Номер каждой изолинии выводится только один раз при обнаружении ее первого пересечения с вертикальной линией вычислительной сетки. Для управления этим процессом используется логическая переменная $flag$.

Обращаем ваше внимание на весьма важное обстоятельство: *используемые в программе построения изолиний значения констант M и N, определяющих размер расчетной сетки, должны совпадать с аналогичными константами в программе получения числового массива, по значениям которого строятся изолинии.* Нарушение данного правила приведет к ошибке во время чтения из файла.

Вопросы и задания

1. Что такое изолиния функции двух переменных?
2. Как выглядит картина изолиний конической поверхности?
3. Чем различаются между собой типизированные и текстовые файлы? Почему выгоднее хранить массивы вещественных чисел в типизированных файлах? Какие преимущества имеет хранение данных в текстовых файлах?
4. Какие элементы управления Delphi использованы в программе построения изолиний?

5. Изучите процедуру построения изолиний и ответьте на вопросы.
   а) Как определяется положение на холсте и размер области вывода изолиний?
   б) Как вычисляется шаг изменения значений изолиний?
   в) Каким образом вычисляются координаты точек пересечения изолинии с линиями расчетной сетки?
   г) Как происходит пересчет координат пересечения изолиний с линиями расчетной сетки в графические координаты холста?
   д) Как обеспечивается однократный вывод номера изолинии на рисунок?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.3.6. Вычислительные эксперименты с построением изотерм

Проведение вычислительных экспериментов для задачи теплопроводности с получением картины изотерм будем осуществлять с помощью программы на Паскале `Teplo` (см. параграф 3.3.4) и программы на Delphi построения изолиний, приведенной в предыдущем параграфе.

Передача данных между ними осуществляется через файл. Организуем в программе `Teplo` вывод в файл значений массива T во внутренних ячейках области вычислений. Для этого добавим в программу следующие операторы, по аналогии с программой `Polusfera`.

В начале программы:

```
Var  Flt: file of real;   //файловая переменная
begin
   Assign(Flt, 'F:\temp\Tmas.dat');  //Назначение файла
   Rewrite(Flt);           //Открытие файла для записи
```

В конце программы:

```
  //Запись массива в файл поэлементно
   For i:=1 To M Do
   For j:=1 To N Do Write(Flt, T[i,j]);
   Close(Flt);
```

Для расчетов будем использовать сетку с параметрами:

```
Const M = 50; N = 50;
```

Вычислительный эксперимент 1: квадратная область, границы с постоянными температурами

Зададим исходные данные такими же, как в параграфе 3.3.3, в 1-м вычислительном эксперименте: 1-я граница имеет температуру 0°, остальные 100°.

Сделаем одно важное замечание. Итерационный вычислительный процесс в программе `Teplo` будет сходиться от любых начальных значений для массива T. Выбор начального приближения влияет лишь на время сходимости: чем ближе начальное приближение к окончательному результату, тем количество итерационных циклов будет меньше, следовательно, и меньше будет время вычислений на компьютере. В проведенном расчете начальное приближение температуры во внутренних ячейках области было задано равным 50 (среднее между 0 и 100).

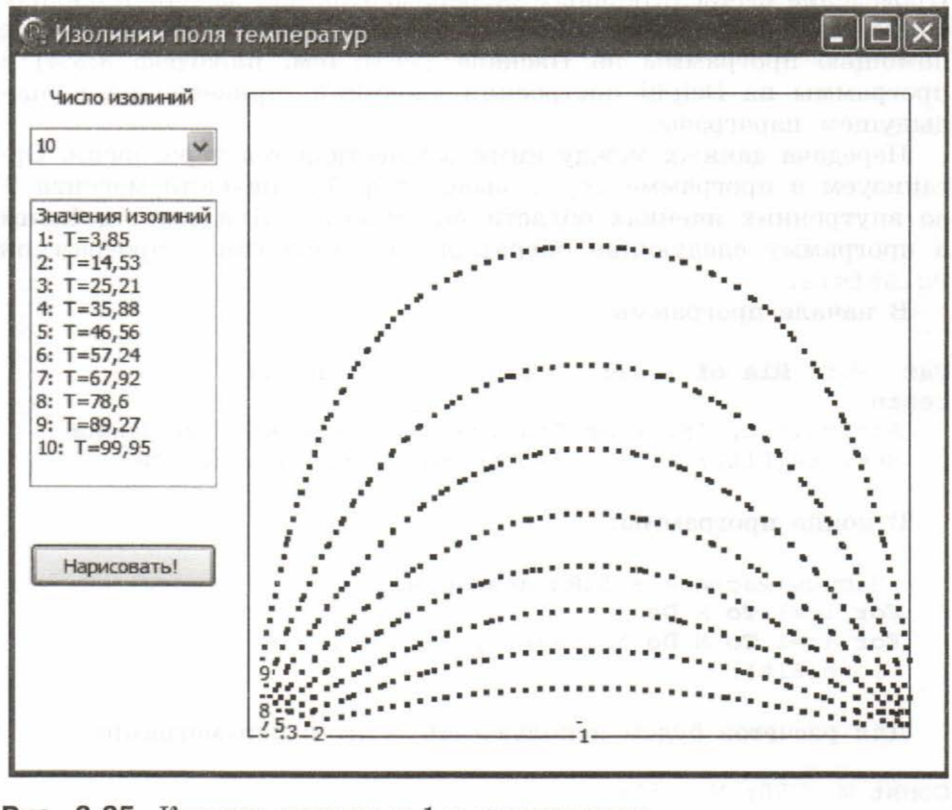


Рис. 3.35. Картина изотерм в 1-м эксперименте

При выполнении программы ввод исходных данных будет выглядеть так:

```
T1=0
T2=100
T3=100
T4=100
Eps=0.0001
Max=500
```

Затем запускаем программу построения изолиний. Результат представлен на рис. 3.35.

Из картины изолиний видно, что наиболее быстрое изменение температуры происходит вблизи нижних углов области. А вблизи верхней границы изменение температуры очень слабое. Там температура близка к граничному значению 100°.

Вычислительный эксперимент 2: квадратная область, границы с линейным распределением температур

Пусть левый нижний и правый верхний углы прямоугольной области поддерживаются при температуре 100°, а левый верхний и правый нижний углы — при температуре 0°. Изменение температуры вдоль каждой границы происходит равномерно, по линейному закону от 0 до 100.

В программу Teplo нужно внести следующие изменения: вводить только погрешность итераций *eps* и максимальное число итераций *Max*; запрограммировать вычисление линейного распределения температуры на границах. Соответствующие разделы программы должны быть следующими:

```
//Ввод исходных данных
Write('Eps='); Readln(eps);
Write('Max='); Readln(Max);
//Граничные условия
for i:=1 to M do
begin T[i,0]:=100-100/(M+1)*i; T[i,N+1]:=100/(M+1)*i  end;
for j:=1 to N do
begin T[0,j]:=100-100/(N+1)*j; T[M+1,j]:=100/(N+1)*j  end;
```

Вычисления проводились на сетке $M = N = 50$. При выполнении программы вводились исходные данные:

```
Eps=0.0001
Max=500
```

Полученный массив температур обрабатывался программой построения изолиний. Результат представлен на рис. 3.36.

В центральной части области температура близка к 50°. Симметричность картины изолиний является следствием симметричности граничных условий для температуры.

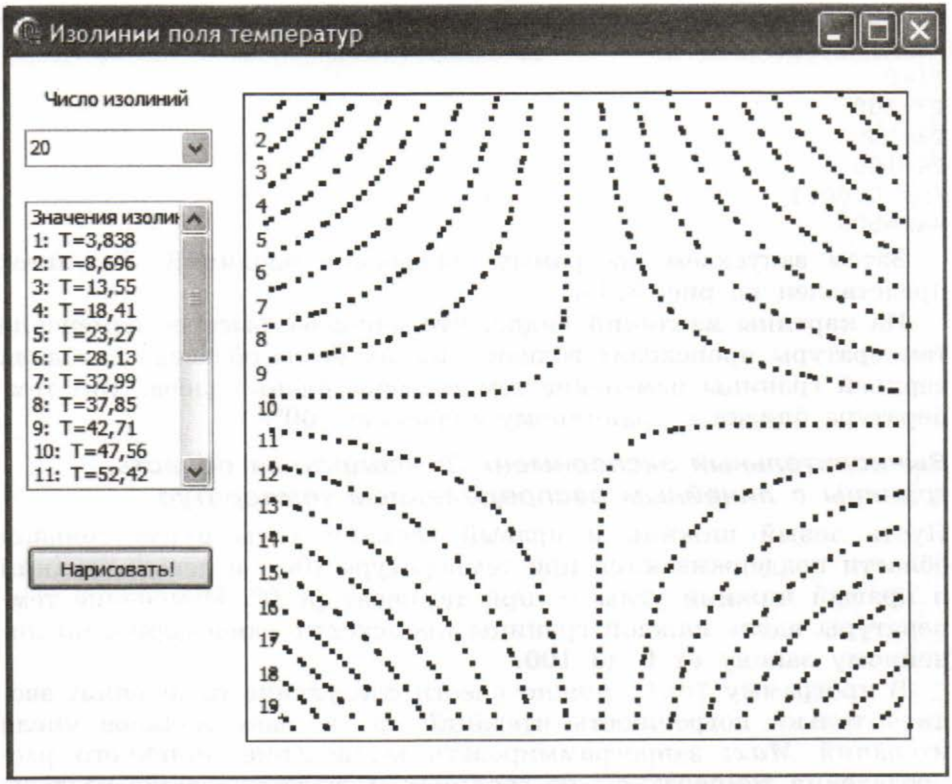


Рис. 3.36. Картина изотерм во 2-м эксперименте

Вычислительный эксперимент 3: вытянутая прямоугольная область, границы с линейным распределением температур

В этом эксперименте вертикальный размер области будет в 2 раза больше горизонтального. Поскольку ячейки расчетной сетки имеют квадратную форму, для параметров сетки выполняется равенство: $M = 2N$. Выполним расчеты на сетке $M = 50$, $N = 25$. Эти значения нужно установить для соответствующих констант в программе `Teplo` и в программе построения изолиний.

Как и в предыдущем эксперименте, температура на границах изменяется линейно от 0 до 100°, поэтому не требуется в программе `Teplo` изменять расчет граничных условий.

Результат вычислительного эксперимента представлен на рисунке 3.37.

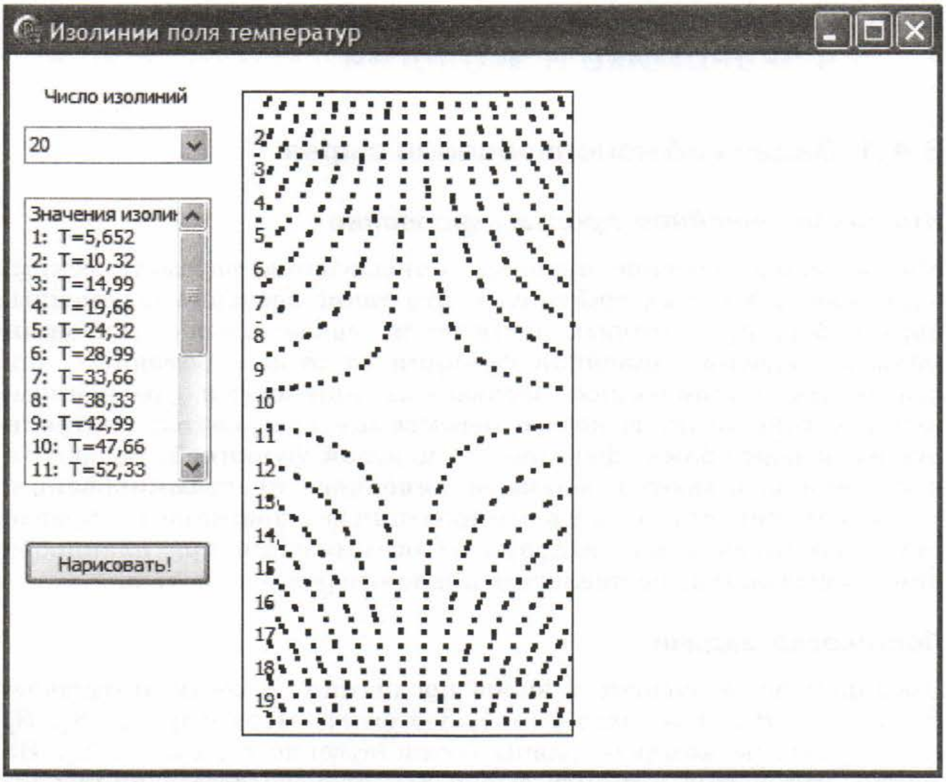


Рис. 3.37. Картина изотерм в 3-м эксперименте

В программе построения изолиний предусмотрено изменение размеров окна графического вывода пропорционально размерам расчетной области.

Вопросы и задания

1. Как в вычислительном эксперименте организуется связь между программой `Teplo` и программой построения изолиний?
2. Какие изменения нужно внести в программу `Teplo`, чтобы на верхней границе области действовало условие теплоизоляции, а на трех остальных границах задавались вводом постоянные значения температур?
3. Какие изменения нужно внести в программу `Teplo`, чтобы на обеих боковых границах области действовало условие теплоизоляции, а на нижней и верхней границах задавались вводом постоянные значения температур?

   Практикум. Раздел «Моделирование»

3.4. Компьютерное моделирование в экономике и экологии

3.4.1. Задача об использовании сырья

Что такое линейное программирование

Многие экономические процессы описываются математическими моделями, в которых требуется найти такие значения переменных параметров, при которых достигается максимальное или минимальное значение линейной функции от этих переменных, при различных ограничениях, задаваемых линейными уравнениями или неравенствами. Искомые переменные называются **контролируемыми факторами**, функция — **целевой функцией.** Задачи такого типа называются **задачами линейного программирования.**

Модели линейного программирования в экономике и управлении используются как инструмент оптимизации при планировании производства, составлении планов перевозок и т. д.

Постановка задачи

Предприятие выпускает n видов продукции, которые обозначим: P_1, P_2, ..., P_n. Для этого используются m видов сырья: S_1, S_2, ..., S_m, запасы которого равны соответственно b_1, b_2, ..., b_m. Известно, что расход i-го вида сырья для производства единицы j-го вида продукции P_j равен a_{ij}. От реализации единицы j-го вида продукции P_j предприятие получает доход, равный C_j. Требуется составить такой план производства каждого вида продукции, чтобы при имеющихся запасах сырья обеспечить предприятию максимальный суммарный доход.

Математическая модель

Составим план производства для ателье, занимающегося пошивом туристического снаряжения — палаток. Для пошива используются три вида материалов (сырья): водоотталкивающая ткань, утеплитель, москитная сетка. Представим данные с двумя видами продукции (палатки двух моделей) и тремя видами материалов (водоотталкивающая ткань, утеплитель, москитная сетка) в виде таблицы.

Ячейки, выделенные фоном, содержат значения расхода каждого вида сырья (материалов) на производство единицы каждого вида продукции. Это и есть матрица a_{ij}. Такой расход сырья называется **удельным.** Обозначим план пошива палаток моде-

Материалы (S_i)	Запасы материалов (b_i), м	Расход материалов на продукцию P_j, м	
		Палатка (модель 1)	Палатка (модель 2)
Водоотталкивающая ткань	105	7	4
Утеплитель	68	3	5
Москитная сетка	66	1	6
Удельный доход от реализации (C_j)		5	6

ли 1 через X (шт.), а план пошива палаток модели 2 через Y (шт.). При таком плане расход материалов, например водоотталкивающей ткани, составит $7 \cdot X + 4 \cdot Y$ метров. Поскольку расход материалов не может превышать имеющиеся запасы, получаем ограничение по расходу водоотталкивающей ткани: $7 \cdot X + 4 \cdot Y \le 105$. Аналогичные рассуждения приводят к ограничениям и по другим видам материалов. Кроме того, значения X и Y не могут быть отрицательными. Сформулированные условия запишем в виде системы неравенств, которым должны удовлетворять неизвестные X и Y:

$$\begin{cases} 7 \cdot X + 4 \cdot Y \le 105; & (3.50) \\ 3 \cdot X + 5 \cdot Y \le 68; & (3.51) \\ X + 6 \cdot Y \le 66; & (3.52) \\ X \ge 0; & (3.53) \\ Y \ge 0. & (3.54) \end{cases}$$

Доход от реализации одной палатки модели 1 равен 5 единицам стоимости (например, 5 тыс. руб.), а доход от реализации палатки модели 2 — 6 единицам стоимости. Тогда суммарный доход предприятия от реализации всей произведенной продукции определится формулой: $Z = 5 \cdot X + 6 \cdot Y$. Следовательно, Z есть функция от X и Y. $Z(X, Y)$ является **целевой функцией**, поскольку целью производства является получение максимального дохода.

Таким образом, математическая формулировка задачи звучит так: *требуется найти такое решение системы линейных неравенств (3.50)–(3.54), при котором целевая функция $Z(X, Y)$ принимает максимальное значение.*

Геометрический метод решения

В случае двух неизвестных (двух видов продукции) задача может быть решена геометрически.

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $a \cdot X + b \cdot Y \le c$, представляют собой *полуплоскость*. Границей этой полуплоскости является прямая, описываемая уравнением $a \cdot X + b \cdot Y = c$. Построим графики трех прямых, описываемых уравнениями, следующими из неравенств (3.50)–(3.52):

$$\begin{cases} Y = -\dfrac{7}{4} \cdot X + \dfrac{105}{4}; & \text{(I)} \\ Y = -\dfrac{3}{5} \cdot X + \dfrac{68}{5}; & \text{(II)} \\ Y = -\dfrac{1}{6} \cdot X + \dfrac{66}{6}. & \text{(III)} \end{cases}$$

Графики строятся в первой четверти координатной плоскости, в соответствии с условиями положительности X и Y (3.53), (3.54). Для построения графиков можно воспользоваться табличным процессором (рис. 3.38).

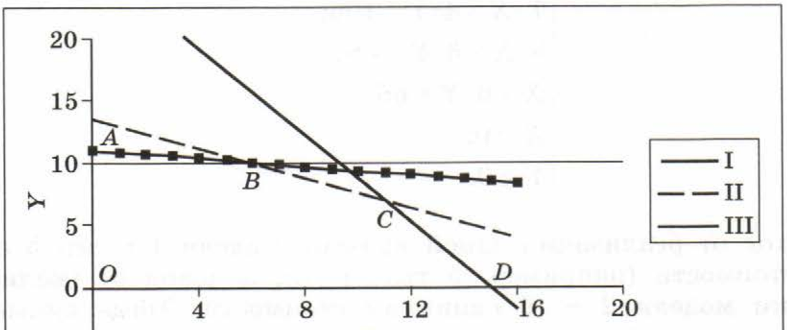


Рис. 3.38. Графическое решение задачи

Далее для каждого неравенства необходимо определить, какая полуплоскость ему соответствует. На рисунке 3.38 общая часть всех полуплоскостей, отвечающих неравенствам (3.50)–(3.52), представлена выпуклым многоугольником $OABCD$. Отрезки OA и OD связаны с ограничениями $X \geq 0$ и $Y \geq 0$ соответственно, отрезки AB, BC и CD — с ограничениями на запасы водоотталкивающей ткани, утеплителя и москитной сетки соответственно. Таким образом, множество решений системы линейных неравенств (3.50)–(3.54) совпадает с множеством точек выпуклого многоугольника $OABCD$, включая его границу.

Графическим представлением линейной функции от двух переменных вида $Z(X, Y) = \alpha X + \beta Y + \gamma$ является плоскость. Ее угол наклона к координатной плоскости XOY зависит от коэффициентов α и β. Если область исследования этой функции ограничить конечной областью на координатной плоскости XOY, то свое максимальное и минимальное значения функция $Z(X, Y)$ примет на границе этой области. Ситуация аналогична тому, как линейная функция от одной переменной $Y(X)$, рассматриваемая на конечном отрезке $a \leq X \leq b$, принимает максимальное и минимальное значения на концах этого отрезка в точках a и b.

В нашей задаче область исследования функции $Z(X, Y) = 5X + 6Y$ ограничена выпуклым многоугольником $OABCD$. Из сформулированного выше правила следует, что максимальное значение Z будет лежать на этой границе. Это значение будет соответствовать либо одной из угловых точек, либо всем точкам одной из сторон, включая две ее вершины. Таким образом, для нахождения максимального значения $Z(X, Y)$ нужно вычислить значения этой функции для координат всех вершин пятиугольника $OABCD$ и выбрать наибольшее из них. X, Y — координаты соответствующей вершины определят искомый оптимальный план производства. Если же окажется, что максимальное значение соответствует двум концам одного прямолинейного отрезка границы, то это значит, что координаты любой точки этого отрезка дают оптимальный план.

Вычислим координаты пяти вершин многоугольника $OABCD$ и соответствующие им значения функции $Z(X, Y)$. Процесс решения и его результаты представлены в таблице на следующей странице.

Из таблицы видно, что наибольшее значение целевая функция принимает в точке C. Таким образом, объем производства, при котором будет получен максимальный доход, составляет 11 палаток первой модели и 7 палаток второй модели. Получаемый при этом доход равен 97 единицам стоимости. Отметим, что при таком плане будут полностью израсходованы запасы водоотталкивающей ткани и утеплителя, а москитная сетка еще останется.

Точка	Система уравнений	Решение системы уравнений		$Z(X, Y) = 5X + 6Y$
		X	Y	
O	$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$	0	0	0
A	$\begin{cases} Y = -X/6 + 11 \\ X = 0 \end{cases}$	0	11	66
B	$\begin{cases} Y = -X/6 + 11 \\ Y = -0{,}6X + 13{,}6 \end{cases}$	6	10	90
C	$\begin{cases} Y = -0{,}6X + 13{,}6 \\ Y = -1{,}75X + 26{,}25 \end{cases}$	11	7	97
D	$\begin{cases} Y = -1{,}75X + 26{,}25 \\ Y = 0 \end{cases}$	15	0	75

Решение с помощью электронных таблиц

Рассмотренную задачу можно решить с помощью табличного процессора. В 10 классе вы уже знакомились с функцией *Поиск решения*, имеющейся в Microsoft Excel. Подготовим данные, как это показано на рис. 3.39. В ячейках B2 и B3 будет получено решение, т. е. найдены объемы производства каждого вида продукции, при которых суммарный доход, вычисляемый в ячейке B17, принимает максимальное значение. Диапазон ячеек B13:B15 содержит формулы, с помощью которых задаются левые части неравенств (3.50)–(3.52), ограничивающих расход сырья. Диапазон ячеек D13: D15 содержит запасы материалов.

Установим курсор в ячейку B17, в которой должно быть вычислено значение целевой функции, и выполним команду **Поиск решения** из меню **Сервис**. В открывшемся окне необходимо произвести установки, показанные на рис. 3.40.

Для этого выполняются следующие действия.

- В поле **Установить целевую ячейку** вводится адрес ячейки B17.
- Для поля **Равной** выбирается параметр **Максимальному значению.**
- В поле **Изменяя ячейки** вводится диапазон ячеек с неизвестными B2:B3.
- Щелчком на кнопке **Добавить** вызывается окно **Добавить ограничение.**

	A	B	C	D
1	Объем производства			
2	Палатки (модель 1)	11		
3	Палатки (модель 2)	7		
4				
5				
6	Материалы	Запасы материалов	Палатки (модель 1)	Палатки (модель 2)
7	Водоотталкивающая ткань	105	7	4
8	Утеплитель	68	3	5
9	Москитная сетка	66	1	6
10	Удельный доход от реализации		5	6
11				
12	Ограничения			
13		=C7*$B$2+D7*$B$3	≤	105
14		=C8*$B$2+D8*$B$3	≤	68
15		=C9*$B$2+D9*$B$3	≤	66
16				
17	Суммарный доход	=C10*B2+D10*B3		

Рис. 3.39. Решение задачи с помощью табличного процессора Microsoft Excel

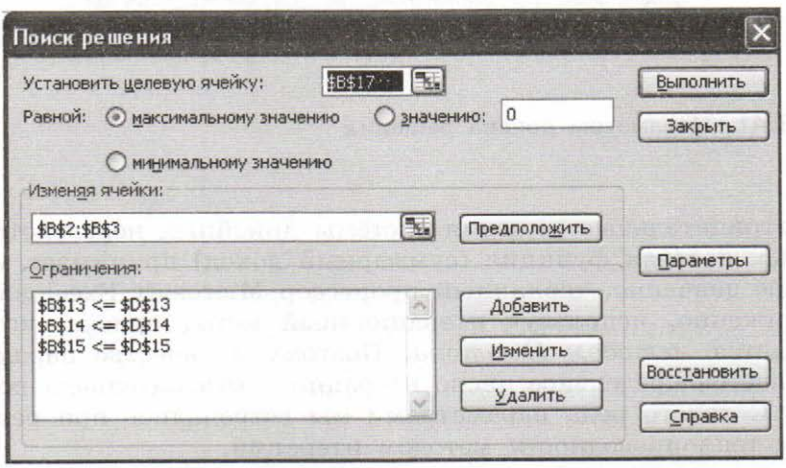


Рис. 3.40. Окно *Поиск решения*

- Для ввода первого ограничения в поле **Ссылка на ячейку** указывается адрес ячейки B13, а в поле **Ограничение** — адрес ячейки D13. Между ними выбирается знак отношения <= и нажимается кнопка **Добавить.**

- Аналогично добавляются два оставшихся ограничения.
- Щелчком на кнопке **Параметры** вызывается окно **Параметры поиска решения** (рис. 3.41), в котором необходимо отметить, что ищутся неотрицательные значения X и Y и используется линейная модель. Это означает то, что целевая функция линейно зависит от переменных X и Y.

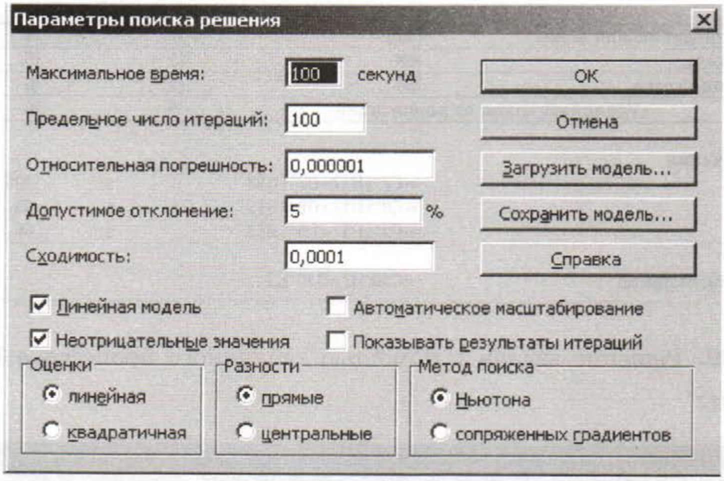


Рис. 3.41. Параметры поиска решения

Неотрицательные решения системы линейных неравенств, при которых целевая функция (суммарный доход) принимает максимальное значение, табличный процессор Microsoft Excel находит приближенно, используя итерационный метод поиска, который называется *методом Ньютона*. Поэтому в качестве параметров указывается предельное число итераций и относительная погрешность. С такого рода параметрами мы встречались при решении задачи теплопроводности методом итераций.

- После того как все установки сделаны, следует нажать кнопку **Выполнить**.

В результате в ячейках B2 и B3 будет получено решение — объем производства палаток первой и второй моделей (рис. 3.42), а в ячейке B17 — максимальный доход, полученный от реализации такого объема продукции. Как и следовало ожидать, полученные значения совпадают с результатами графического метода решения задачи: $X = 11$, $Y = 7$, $Z = 97$.

	A	B	C	D
1	**Объем производства**			
2	**Палатки (модель 1)**	**11**		
3	**Палатки (модель 2)**	**7**		
4				
5				
6	**Материалы**	**Запасы материалов**	**Палатки (модель 1)**	**Палатки (модель 2)**
7	**Водоотталкивающая ткань**	**105**	**7**	**4**
8	**Утеплитель**	**68**	**3**	**5**
9	**Москитная сетка**	**66**	**1**	**6**
10	**Удельный доход от реализации**		**5**	**6**
11				
12	**Ограничения**			
13		**105**	**≤**	**105**
14		**68**	**≤**	**68**
15		**53**	**≤**	**66**
16				
17	**Суммарный доход**	**97**		

Рис. 3.42. Результаты решения задачи

Система основных понятий

<table>
<tr><th colspan="2">Задачи линейного программирования</th></tr>
<tr><td colspan="2">Математические модели, в которых требуется найти неотрицательные значения переменных, обеспечивающих максимальное, минимальное или выбранное значение линейной функции этих переменных при различных ограничениях, задаваемых линейными уравнениями или неравенствами, называются моделями линейного программирования. Искомые переменные называются контролируемыми факторами, функция — целевой функцией</td></tr>
<tr><th colspan="2">Задача об использовании сырья</th></tr>
<tr><td colspan="2">Найти объемы производства, которые обеспечивают максимальную выручку от реализации продукции, при условии, что расход сырья не должен превышать имеющиеся запасы</td></tr>
<tr><th colspan="2">Методы решения задачи</th></tr>
<tr><td>Графический метод (для 2 переменных)</td><td>Средство Поиск решения в табличном процессоре</td></tr>
</table>

Вопросы и задания

1. Что является контролируемыми факторами в задаче об использовании сырья?
2. Что является целевой функцией в задаче об использовании сырья?
3. Каким образом задаются ограничения?
4. Как понимается линейность задач линейного программирования?
5. Что такое удельный расход сырья?
6. При каком количестве контролируемых факторов задача линейного программирования может быть решена графически?
7. Составьте математическую модель линейного программирования для решения следующей задачи. Фирма выпускает два типа почвы — для комнатных растений и для рассады. Производство почвы требует использования компонентов A и B. Максимальные суточные запасы этих компонентов на складе составляют 6 и 8 тонн соответственно. Для производства 1 тонны почвы для комнатных растений требуется 1 тонна компонента A и 2 тонны компонента B. Для производства 1 тонны почвы для рассады требуется 2 тонны компонента A и 1 тонна компонента B. Суточный спрос на почву для комнатных растений не превышает 2 тонны. Разница между суточным спросом на почву для комнатных растений и спросом на почву для рассады не превышает 1 тонну. Оптовая цена за 1 тонну почвы для комнатных растений составляет 3000 руб., а для рассады — 2000 руб. Найдите оптимальные объемы суточного производства каждого вида почвы, обеспечивающие максимальную выручку от реализации продукции.
8. Решите задачу 7 геометрическим методом.

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.4.2. Транспортная задача

Рассмотрим еще одну типовую задачу линейного программирования.

Постановка задачи

Транспортной задачей называют задачу составления плана перевозок от поставщиков к потребителям с помощью некоторых транспортных средств. Составленный план должен обеспечивать выполнение таких условий, как:

- полное удовлетворение спроса потребителей;
- вывоз всей продукции от поставщика;
- минимизация транспортных затрат.

Математическая модель

Рассмотрим простейший вариант транспортной задачи. В m пунктах отправления (складах) A_1, A_2, ..., A_m находится однородный груз в количестве a_1, a_2, ..., a_m единиц соответственно. Потребность в этом грузе в n пунктах назначения (магазинах) B_1, B_2, ..., B_n составляет b_1, b_2, ..., b_n соответственно. Будем считать, что сумма запасов на складах равна суммарным потребностям в магазинах, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Такая модель называется **замкнутой**.

Обозначим через C_{ij} **удельные затраты**, т. е. затраты на перевозку единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, а через X_{ij} — неизвестный объем груза, который надо перевезти из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Перевозку груза надо организовать таким образом, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными. Суммарные затраты на перевозки Z определяются следующим образом: необходимо просуммировать все объемы перевозок груза, умноженные на соответствующие удельные затраты, т. е. $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot X_{ij}$. Суммарные затраты являются **целевой функцией.**

Искомыми величинами являются объемы X_{ij} перевозок груза, отправляемые каждым поставщиком каждому потребителю при выполнении указанных условий.

Рассмотрим транспортную задачу на примере четырех складов и четырех магазинов. Известно, что на складах имеется запас муки в количестве 45, 100, 20, 75 мешков. А магазины имеют потребность в этом товаре в количестве 30, 80, 95, 35 мешков.

		Магазин № 1	**Магазин № 2**	**Магазин № 3**	**Магазин № 4**
		$b_1 = 30$	$b_2 = 80$	$b_3 = 95$	$b_4 = 35$
Склад № 1	$a_1 = 45$	6	3	7	10
Склад № 2	$a_2 = 100$	10	4	12	10
Склад № 3	$a_3 = 20$	5	9	8	11
Склад № 4	$a_4 = 75$	4	2	4	8

Ячейки, выделенные фоном, содержат удельные стоимости перевозок C_{ij}. Например, стоимость перевозки единицы груза (мешка) со склада № 3 в магазин № 4 составляет 11 денежных единиц. Проверим замкнутость модели. Для этого просуммируем все запасы муки на складах: 45 + 100 + 20 + 75 = 240. Найдем суммарные потребности магазинов в муке: 30 + 80 + 95 + 35 = 240. Таким образом, модель является замкнутой, т. е. потребность магазинов в муке равна запасу на складах.

Весь груз со складов должен быть вывезен. Этот факт для i-го склада можно отразить следующим образом: $X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + X_{i4} = a_i$. Весь груз в магазины должен быть ввезен. Для j-го магазина будет справедливо следующее: $X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + X_{4j} = b_j$.

Таким образом, удовлетворению спроса магазинов отвечает выполнение системы уравнений:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = b_1; \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = b_2; \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = b_3; \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = b_4. \end{cases}$$

Вывоз всего груза со складов достигается при выполнении системы уравнений:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = a_1; \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = a_2; \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = a_3; \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = a_4. \end{cases}$$

Получается общая система из 8 уравнений с 16 неизвестными, которая имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Среди этих решений интерес представляют неотрицательные решения, при которых суммарные затраты по всем маршрутам будут минимальны, т. е. целевая функция может быть представлена следующим образом:

$$Z = C_{11} \cdot X_{11} + \ldots + C_{14} \cdot X_{14} + C_{21} \cdot X_{21} + \ldots + C_{24} \cdot X_{24} + C_{31} \cdot X_{31} + \ldots + \\ + C_{34} \cdot X_{34} + C_{41} \cdot X_{41} + \ldots + C_{44} \cdot X_{44}.$$

Решение с помощью электронных таблиц

В силу большого количества неизвестных решить транспортную задачу геометрическим методом не представляется возможным. Для ее решения можно использовать электронные таблицы. Рассмотрим решение задачи на примере табличного процессора Microsoft Excel.

Представим данные в виде, показанном на рис. 3.43.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица перевозок					
2			Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
3		Склад №1					=СУММ(C3:F3)
4		Склад №2					=СУММ(C4:F4)
5		Склад №3					=СУММ(C5:F5)
6		Склад №4					=СУММ(C6:F6)
7			=СУММ(C3:C6)	=СУММ(D3:D6)	=СУММ(E3:E6)	=СУММ(F3:F6)	
8							
9							
10							
11		b_j	30	80	95	35	
12	a_i		Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
13	45	Склад №1	6	3	7	10	
14	100	Склад №2	10	4	12	10	
15	20	Склад №3	5	9	8	11	
16	75	Склад №4	4	2	4	8	
17							
18							
19		Суммарные затраты	=СУММПРОИЗВ(C3:F6;C13:F16)				

Рис. 3.43. Подготовка электронной таблицы к решению задачи о перевозках

Исходными данными являются удельные затраты на перевозки (диапазон ячеек C13:F16), запасы муки на складах (диапазон ячеек A13:A16), потребности магазинов в муке (диапазон ячеек C11:F11).

Диапазон ячеек C3:F6 предназначен для получения искомого решения — объемов перевозок груза. Суммируя объемы перевозок в каждой строке, задаем левые части уравнений-ограничений, обеспечивающих вывоз всего груза с каждого склада. Суммированием объемов перевозок по столбцам задаются левые части уравнений-ограничений, удовлетворяющих спрос каждого магазина в муке.

Формула =СУММПРОИЗВ(C3:F6;C13:F16), вычисляющая целевую функцию (суммарные затраты) Z, размещена в ячейке C19. Встроенная функция СУММПРОИЗВ суммирует произведения, полученные построчным перемножением содержимого ячеек из диапазонов C3:F6 и C13:F16. (Поясним на примере: формула =СУММПРОИЗВ(A1:B2;A3:B4) равносильна формуле =A1*A3+B1*B3+A2*A4+B2*B4.)

Установим курсор в ячейку C19, в которой должно быть вычислено значение целевой функции. Выполним команду **Поиск решения** из меню **Сервис**. В открывшемся окне необходимо произвести установки, показанные на рис. 3.44.

Установим параметры поиска решения — неотрицательные значения (в нашем случае это объемы перевозок) и линейную модель вычислений, воспользовавшись кнопкой **Параметры**. В результате будет найдено решение, представленное на рис. 3.45.

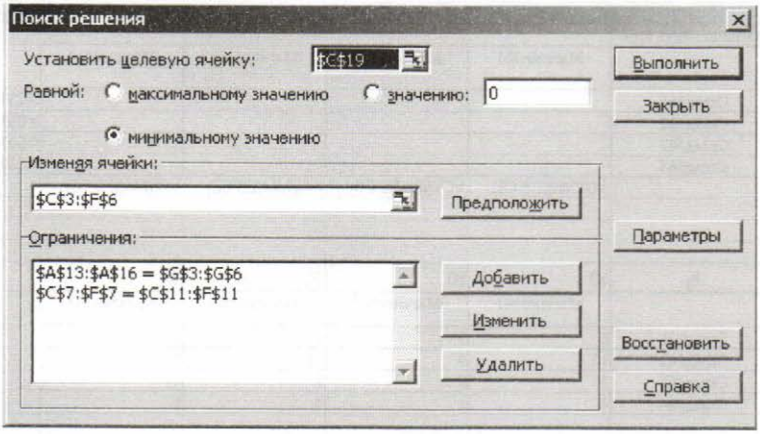


Рис. 3.44. Установка параметров средства *Поиск решения*

	A	B	C	D	E	F	G
1			Матрица перевозок				
2			Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
3		Склад №1	0	10	35	0	45
4		Склад №2	30	70	0	0	100
5		Склад №3	0	0	20	0	20
6		Склад №4	0	0	40	35	75
7			30	80	95	35	
8							
9							
10							
11		b_j	30	80	95	35	
12	a_i		Магазин №1	Магазин №2	Магазин №3	Магазин №4	
13	45	Склад №1	6	3	7	10	
14	100	Склад №2	10	4	12	10	
15	20	Склад №3	5	9	8	11	
16	75	Склад №4	4	2	4	8	
17							
18							
19	Суммарные затраты		1455				

Рис. 3.45. Результат решения задачи о перевозках

Искомые объемы перевозок представлены в ячейках C3:F6. Со склада № 1 мука будет отправлена в магазины № 2 и 3 в объемах 10 и 35 мешков соответственно, со склада № 2 — в магазины № 1 и 2 в объемах 30 и 70 мешков, со склада № 3 — в магазин № 3 в объеме 20 мешков, со склада № 4 — в магазины № 3 и 4 в объемах 40 и 35 мешков. Минимальные затраты на перевозки составляют 1455 денежных единиц.

Система основных понятий

Транспортная задача — задача линейного программирования
Транспортной задачей называют задачу составления плана перевозок от поставщиков к потребителям с помощью некоторых транспортных средств. Необходимо найти объемы перевозок, которые обеспечивают: • удовлетворение спроса потребителей; • вывоз всей продукции; • минимизацию транспортных затрат

Вопросы и задания

1. Что является контролируемыми факторами в транспортной задаче?
2. Что является целевой функцией в транспортной задаче?
3. Должно ли в транспортной задаче количество «складов» совпадать с количеством «магазинов»?
4. Что такое удельные расходы?
5. Что означает замкнутость модели для транспортной задачи?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.4.3. Задачи теории расписаний

Постановка задач теории расписаний

В задачах теории расписаний рассматриваются комплексы работ, связанных общим объектом или общим исполнителем, направленные на достижение определенной цели. Модели теории расписаний позволяют найти наиболее дешевый или наиболее быстрый порядок выполнения работ.

К задачам выбора самого дешевого порядка выполнения работ относится известная *задача о шлюзе*. Шлюз может пропускать в порядке очереди только по одному судну. Если создается очередь, то необходимо определить такой порядок прохождения судов через шлюз, при котором будет минимален ущерб от простоя. В такой формулировке задача появилась еще в XIX веке.

При выборе наиболее быстрого по времени варианта работ минимизируется отрезок времени от начала работ до их окончания (достижения цели). Простейшей задачей такого типа является *задача о двух станках*. На двух станках надо обработать N деталей. Каждая из деталей обрабатывается сначала на одном станке, а затем — на втором. Время обработки каждой детали на каждом станке известно. Задача состоит в том, что необходимо определить такой порядок обработки деталей, при котором время выполнения всей работы будет минимальным. Порядок обработки, минимизирующий время T, называется оптимальным.

Задача о шлюзе

Математическая модель

Через шлюз последовательно должны пройти N судов. Известно время (в часах) шлюзования каждого судна — t_i и ущерб от 1 часа простоя судна — U_i денежных единиц. Здесь индекс обозначает порядковый номер судна в очереди. Например, t_1 — это время шлюзования 1-го судна, t_2 — время шлюзования 2-го судна, u_2 — стоимость 1 часа простоя в ожидании своей очереди 2-го судна и т. д. Время простоя в очереди, например, 4-го судна, если оно ждет, пока через шлюз пройдут первые три, равно: $t_1 + t_2 + t_3$, а материальный ущерб от простоя 4-го судна равен: $u_4(t_1 + t_2 + t_3)$.

Показатель экономической эффективности работы шлюза связан с суммарным ущербом от простоя судов в ожидании своей очереди на шлюзование. Например, если к шлюзу подошли одновременно 4 судна и они пропускаются через шлюз в порядке их номеров, то суммарный ущерб от простоя (S) вычисляется так:

$$S = u_2 \cdot t_1 + u_3(t_1 + t_2) + u_4(t_1 + t_2 + t_3).$$

В общем случае, если в очереди находятся N судов, то суммарный ущерб от простоя выражается формулой:

$$S = \sum_{i=2}^{N} u_i \sum_{j=1}^{i-1} t_j.$$

Задача состоит в том, чтобы определить такой порядок пропускания судов через шлюз, при котором величина S будет минимальна.

Математический анализ этой задачи приводит к следующему ответу: *минимум величины S достигается в том случае, если суда пропускаются в порядке убывания величины* $\frac{u_i}{t_i}$. Этот принцип можно пояснить на следующем примере. Пусть к шлюзу подошли одновременно два судна, время шлюзования которых одинаково ($t_1 = t_2$), но стоимость простоя разная. Тогда в первую очередь надо пропустить то судно, у которого простой стоит дороже. Если же у двух судов в очереди одинаковая стоимость простоя ($u_1 = u_2$), то вперед надо пропустить то судно, у которого меньше время шлюзования.

Критерию убывания величины $\frac{u_i}{t_i}$ равносилен критерий возрастания величины $\frac{t_i}{u_i}$. При вычислениях можно использовать как тот, так и другой критерий.

Решение в электронных таблицах

Рассмотрим пример для пяти судов, выстроившихся в очередь к шлюзу в порядке их прибытия. Данные приведены в таблице.

№ судна	1	2	3	4	5
Время шлюзования	45	36	28	24	72
Ущерб от простоя	5	12	7	4	3

Вычислим общий ущерб от простоя по формуле:

$$S = \sum_{i=2}^{5} u_i \sum_{j=1}^{i-1} t_j = u_2 \cdot t_1 + u_3 \cdot (t_1 + t_2) + u_4 \cdot (t_1 + t_2 + t_3) + u_5 \cdot (t_1 + t_2 + t_3 + t_4).$$

Если шлюзование судов проводить в таком порядке, то ущерб от простоя не будет минимальным. В нашем случае сумма ущерба составляет 1942 денежные единицы:

$$S = 12 \cdot 45 + 7 \cdot (45 + 36) + 4 \cdot (45 + 36 + 28) + 3 \cdot (45 + 36 + 28 + 24) = 1942.$$

Найдем оптимальный порядок (расписание) шлюзования судов, обеспечивающий минимальный ущерб от простоя.

Для решения задачи воспользуемся табличным процессором Microsoft Excel. Чтобы найти ущерб от простоя, в ячейках C6:F6 вычислим суммы вида: $\sum_{j=1}^{i-1} t_j$, а в ячейку B7 поместим формулу =СУММПРОИЗВ(C3:F3;C6:F6). В соответствии с этой формулой вычисляется сумма произведений: C3*C6+D3*D6+E3*E6+F3*F6 (рис. 3.46).

В 4-ю строку таблицы впишем формулы, по которым для каждого судна сосчитается величина $k = \frac{t_i}{u_i}$. Затем отсортируем столбцы диапазона ячеек B1:F4 в порядке возрастания значений k в 4-й строке. Указание на то, что производится сортировка столбцов, задается с помощью диалогового окна **Параметры сортировки** (рис. 3.47).

После проведения сортировки в диапазоне ячеек B1:F1 будет содержаться порядок прохождения судов через шлюз со следую-

H15	▼	fx				
	A	B	C	D	E	F
1	**№ судна**	1	2	3	4	5
2	**Время простоя**	45	36	28	24	72
3	**Ущерб от простоя**	5	12	7	4	3
4						
5						
6			=B2	=C6+C2	=D6+D2	=E6+E2
7		=СУММПРОИЗВ(C3:F3;C6:F6)				

Рис. 3.46. Ввод данных в таблицу для решения задачи о шлюзе

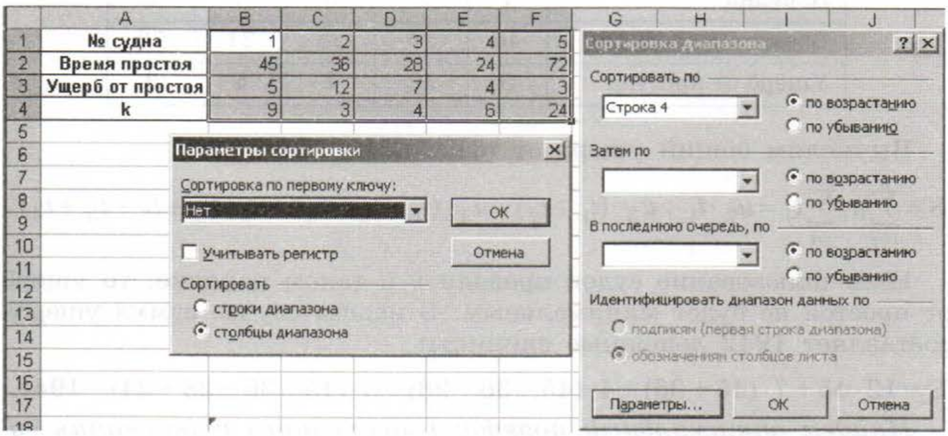


Рис. 3.47. Обработка данных для решения задачи о шлюзе

щими номерами: № 2, 3, 4, 1, 5. При такой очередности общий ущерб от простоя будет минимальным и составит 1347 денежных единиц, в то время как при шлюзовании судов в порядке их прибытия общий ущерб составлял 1942 денежных единицы (рис. 3.48).

	A	B	C	D	E	F
1	**№ судна**	2	3	4	1	5
2	**Время простоя**	36	28	24	45	72
3	**Ущерб от простоя**	12	7	4	5	3
4	**k**	3	4	6	9	24
5						
6			36	64	88	133
7	**Общий ущерб**	1347				

Рис. 3.48. Результат решения задачи о шлюзе

Задача о двух станках

Постановка задачи

Имеются два обрабатывающих станка. Например, первый — токарный, второй — шлифовальный. Требуется изготовить m деталей, каждая из которых сначала обрабатывается на первом станке, затем — на втором. Считается, что время обработки i-й детали на j-м станке известно и равно t_{ij}. Необходимо выбрать такой порядок обработки, т. е. расписание работы станков, чтобы полное время T, затраченное на изготовление всех деталей, было минимальным.

Расчет полного времени обработки на двух станках

Пусть требуется изготовить 5 деталей, обрабатывая каждую деталь сначала на токарном станке, затем — на шлифовальном. В следующей таблице для каждой детали указано время ее обработки на токарном и шлифовальном станках:

№ детали	Время вытачивания	Время шлифовки
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4

Рассчитаем полное время выполнения всей работы, если детали изготовлялись в порядке их нумерации в таблице. Отсчет времени начинается с начала обработки первой детали на первом станке и заканчивается концом обработки последней детали на втором станке. На первом (токарном) станке очередная деталь начинает обрабатываться сразу после окончания обработки предыдущей детали. На втором (шлифовальном) станке очередная деталь начинает обрабатываться после того, как закончится ее обработка на первом станке и второй станок окажется свободным, т. е. закончится обработка предыдущей детали. Исходя из этих правил заполняется следующая таблица расчета суммарного времени работы по изготовлению пяти деталей:

№ детали	Время окончания вытачивания детали	Время окончания шлифовки детали	Время простоя 2-го станка
1	3	3 + 6 = 9	3
2	3 + 7 = 10	10 + 2 = 12	1
3	10 + 4 = 14	14 + 7 = 21	2
4	14 + 5 = 19	21 + 3 = 24	0
5	19 + 7 = 26	26 + 4 = 30	2

Столбцы заполняются последовательно: сначала для первого станка, потом для второго. В последнем столбце указано время простоя 2-го станка в ожидании поступления на него очередной детали для обработки. В начале работы 2-й станок «стоит», пока не закончится обработка первой детали на 1-м станке. А последующие простои — это время ожидания окончания обработки очередной детали на первом станке после того, как на втором станке закончилась обработка предыдущей детали. Отметим, что первый станок никогда не простаивает.

Расчет показал, что вся работа будет выполнена за 30 минут. При этом суммарное время простоя 2-го станка составит 8 минут.

Нетрудно догадаться, что принятая нами последовательность изготовления деталей может оказаться не оптимальной. Задача оптимального планирования состоит в том, чтобы определить такую последовательность, при которой полное время работы окажется минимальным.

Алгоритм решения задачи

Алгоритм для решения поставленной задачи был предложен С. М. Джонсоном в 1950-х годах. Идея его состоит в том, чтобы расставить очередность обработки деталей так, чтобы минимизировать время простоя 2-го станка. Опишем суть алгоритма.

Задана матрица времени обработки для каждой детали на каждом станке. В первом столбце матрицы — номера деталей.

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$
2	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$
3	$t_{3,1}$	$t_{3,2}$
4	$t_{4,1}$	$t_{4,2}$
5	$t_{5,1}$	$t_{5,2}$

Среди всех времен $t_{i,j}$ обработки деталей надо выбрать минимальное значение. Если минимальное значение принимают несколько величин, то можно выбрать любую из них. Если это время относится к обработке детали на первом станке, то поставить деталь (строку в матрице, соответствующую этой детали) в начало списка обработки, в противном случае — в конец списка. Затем надо исключить деталь из рассмотрения и повторить все действия с оставшимися деталями. После m шагов будет получен оптимальный порядок обработки деталей.

Покажем применение алгоритма Джонсона к рассмотренным выше исходным данным о двух станках. Построение оптимального плана происходит за 5 шагов. Фоном отмечаются строки, позиция которых определилась после очередного шага.

Исходная таблица

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
2	7	2
3	4	7
4	5	3
5	7	4

Шаг 1

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
4	5	3
5	7	4
2	7	2

Шаг 2

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
4	5	3
5	7	4
2	7	2

Шаг 3

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

Шаг 4

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

Шаг 5

№ детали	1-й станок	2-й станок
1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

В результате получен следующий порядок обработки деталей, при котором время обработки будет минимальным: № 1, 3, 5, 4, 2. Используя полученную таблицу, вычислим время выполнения всей работы по изготовлению пяти деталей.

№ детали	Время окончания обработки на 1-м станке	Время окончания обработки на 2-м станке	Время простоя 2-го станка
1	3	3 + 6 = 9	3
3	3 + 4 = 7	9 + 7 = 16	0
5	7 + 7 = 14	16 + 4 = 20	0
4	14 + 5 = 19	20 + 3 = 23	0
2	19 + 7 = 26	26 + 2 = 28	3

Таким образом, на выполнение всей работы потребуется 28 минут. Это время меньше, чем рассчитанное раньше без оптимального планирования по алгоритму Джонсона за счет того, что на 2 минуты сократилось время простоя 2-го станка.

Программирование алгоритма Джонсона

Реализуем алгоритм Джонсона для двух станков на языке программирования Паскаль. Все исходные данные будут храниться в двумерном массиве T — матрице из трех столбцов и m строк. Первый столбец содержит номера деталей, второй — время обработки каждой детали на 1-м станке, третий — время обработки каждой детали на 2-м станке. Для варианта рассмотренных выше данных:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Результат решения задачи будет получен в виде двумерного массива P. В первом столбце массива будут перечислены номера деталей в оптимальном порядке их изготовления, а второй и третий столбцы будут содержать время вытачивания и время шлифовки каждой детали. Матрица P будет отличаться от матрицы T порядком расположения строк.

В программе используются следующие переменные:

m — количество обрабатываемых деталей;

min — минимальное значение в массиве T;

ki, kj — номер строки и номер столбца минимального элемента массива T;

L, f — текущие позиции начала и конца списка обработки деталей;

i, j — индексные переменные.

Текст программы на Паскале

```
Program Jonson;
Var T, P: array[1..5, 1..3] of real; min: real;
    i, j, ki, kj, m, L, f: integer;
begin
//ввод массива исходных данных по строкам
  for i:=1 to 5  do
  begin
    for j:=1 to 3 Do Read(T[i,j]);
    Readln;
  end;
  m:=5;
  //Задаем начальные значения для текущей позиции начала
  //и конца списка обработки
  f:=1; L:=m;
  while m>0 do
  begin min:=T[1,2];
    for i:=1 to m  do
      for j:=2 to 3  do
      //поиск минимального времени обработки деталей
        if T[i,j]<=min then
        begin min:=T[i,j]; ki:=i; kj:=j end;
    //Перестановка детали в конец (если kj=3)
    //или в начало списка обработки деталей
    if kj=3 then
    begin
      for j:=1 to 3 do P[L,j]:=T[ki,j];
      L:=L-1;
    end
    else
    begin
      for j:=1 to 3 do P[f,j]:=T[ki,j];
      f:=f+1;
    end;
    //исключение ki-й строки в массиве T
    //из дальнейшего рассмотрения
    if ki<m then
```

```
    begin
      for i:=ki to m-1 do
        for j:=1 to 3 do
          T[i,j]:=T[i+1,j]
    end;
    m:=m-1;
  end;
  //Вывод результата
  Writeln('Первый столбец матрицы содержит оптимальный
          порядок обработки деталей');
  for i:=1 to 5 do
  begin
    for j:=1 to 3 do Write(P[i,j], ' ');
    Writeln
  end
end.
```

В результате исполнения программы будет получен двумерный массив:

1	3	6
3	4	7
5	7	4
4	5	3
2	7	2

Результат работы программы совпал с результатом, полученным выше «ручным» способом.

Система основных понятий

Задачи теории расписаний	
В задачах теории расписаний рассматриваются комплексы работ, связанных общим объектом или общим исполнителем, направленные на достижение определенной цели. Модели теории расписаний позволяют найти наиболее дешевый или наиболее быстрый порядок выполнения работ	
Наиболее дешевый порядок выполнения работ	**Наиболее быстрый порядок выполнения работ**
Задача о шлюзе Шлюз может пропускать в порядке очереди только по одному судну. Если создается очередь, то необходимо определить такой порядок прохождения судов через шлюз, при котором будет минимален ущерб от простоя судов	*Задача о двух станках* Предстоит изготовить m деталей, каждая из которых сначала обрабатывается на первом станке, затем — на втором. Необходимо выбрать такой порядок обработки, чтобы полное время выполнения работы было минимальным

Вопросы и задания

1. Сформулируйте постановку задачи о шлюзе: что дано, что требуется получить.
2. Как вычисляется ущерб от простоя судов в задаче о шлюзе?
3. Опишите алгоритм (блок-схему) или напишите программу на Паскале решения задачи о шлюзе.
4. Сформулируйте постановку задачи о двух станках.
5. Как вычисляется время выполнения работы в задаче о двух станках?
6. За счет чего возникают простои в работе 2-го станка?
7. Найдите время обработки деталей на двух станках и суммарное время простоя 2-го станка по следующим исходным данным:

№ детали	Время обработки на 1-м станке	Время обработки на 2-м станке
1	10	9
2	7	2
3	4	5
4	12	3
5	7	14
6	4	9

8. Реализуйте «вручную» алгоритм Джонсона для данных из предыдущей задачи и найдите оптимальный план обработки деталей. Для этого плана вычислите время всей работы. Сравните полученный результат с результатом выполнения предыдущего задания.

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.4.4. Задачи теории игр

Экономика и теория игр

В условиях рыночной экономики часто приходится принимать решения при возможных действиях нескольких субъектов (сторон). Обычно их интересы не совпадают, т. е. имеет место противоборство сторон, стремящихся добиться положительных результатов за счет соперников. Такие ситуации возникают, например, при конкуренции фирм на одном рынке. При этом приходится решать задачи, которые относятся к разделу математики, получившему название **теория игр**.

Игровые задачи стали предметом математических исследований еще в XVII веке. В то время интерес был направлен на создание математических моделей азартных игр. Возможность применения игровых моделей к экономике была рассмотрена и развита Дж. фон Нейманом и О. Моргенштейном (1944 г.).

Игра — соблюдаемые правила и условия, моделирующие реальную конфликтную ситуацию.

Игрок — участник игры со своими целями, принимающий решения.

Парная игра — игра двух игроков.

Ход — реализация возможного решения во время игры.

Стратегия — возможная последовательность ходов игрока.

Выигрышная стратегия — правило совершения ходов, при котором игрок добивается выигрыша при любых ответных ходах другого игрока.

Конечная игра приводит к заключительной позиции (выигрышу) за конечное число шагов.

Игра с полной информацией означает, что игрок всегда знает, к какой позиции приведет выбранный им ход. Примерами такой игры могут служить игра в крестики-нолики, шахматы, шашки.

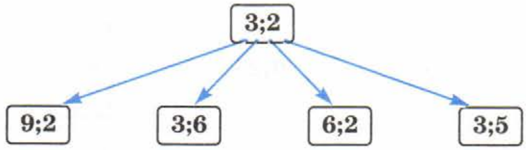
В экономике часто приходится принимать решения в условиях неопределенности (недостаточной осведомленности). Подобные задачи называются **играми с природой** или **играми с природной неопределенностью.** Это название связано с тем, что первоначально такими задачами являлись задачи об определении оптимальных запасов продуктов, топлива и пр. в случае наступления природных катаклизмов (засуха, наводнение и др.). Термин «природа» хотя и может отражать неблагоприятные погодные условия, в общем случае означает неясные внешние факторы и условия, которые формируют спрос, доходы. В роли неблагоприятного фактора может выступать, например, экономический кризис.

Конечные игры с полной информацией

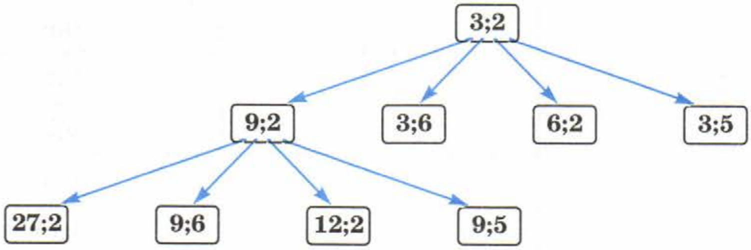
Далее мы будем исследовать только конечные игры с полной информацией.

Рассмотрим следующую игру. Имеются две кучки камней — 3 и 2 камня. Два игрока ходят по очереди. За один ход игрок либо увеличивает число камней в какой-то кучке в 3 раза, либо добавляет 3 камня в какую-то кучку. Выигрывает тот игрок, после хода которого в одной из кучек становится не менее 24 камней. В распоряжении игроков имеется неограниченное количество камней. Кто выигрывает в этой игре: игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

Текущее состояние игры будем обозначать парой чисел $(m;n)$, где m — количество камней в первой кучке, n — во второй. После хода первого игрока может получиться одно из следующих текущих состояний игры: (9;2), (3;6), (6;2) и (3;5). Изменение состояния игры можно изобразить с помощью графа. Вот граф всех вариантов после первого хода:



Этот граф можно строить дальше. Он будет иметь структуру дерева. Для каждого из четырех состояний игры после первого хода можно построить следующий уровень дерева, отражающий всевозможные ходы второго игрока. Например, продолжая первую (слева) ветвь дерева, получим граф такого вида:



Такой граф называется **деревом игры**. Для любой игры с полной информацией можно построить дерево игры. Полное изображение дерева игры в графической форме может оказаться довольно громоздким. Более компактным выглядит описание того же дерева в табличной форме. В таблице 3.3 отображены все варианты состояния игры после двух ходов игроков.

Проанализируем второй ход игры. Из таблицы видно, что ход первого игрока, приводящий к состоянию (9;2), уже на втором ходе приводит к выигрышу второго игрока — (27;2). Анализируя другие варианты хода первого игрока и возможные ответы на них второго игрока, можно сделать вывод о том, что у второго игрока всегда есть ход, который приведет его к выигрышу на 4-м ходе. Такие ходы выделены фоном в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Табличная форма дерева игры на 2 хода

Исходное состояние	1-й ход 1-й игрок (все варианты хода)	2-й ход 2-й игрок (все варианты хода)
3;2	9;2	27;2
		9;6
		12;2
		9;5
	3;6	9;6
		3;18
		6;6
		3;9
	6;2	18;2
		6;6
		9;2
		6;5
	3;5	9;5
		3;15
		6;5
		3;8

Занесем в табл. 3.4 все варианты 3-го хода, который совершает первый игрок для выигрышных вариантов хода второго игрока, сделанного на втором шаге игры (выделенных фоном). Обратим внимание на то, что текущие состояния игры (6;6) и (6;5) на втором ходу повторяются дважды при различных ходах первого игрока, поэтому учтем их только один раз при дальнейшем заполнении таблицы.

В таблице 3.4 представлены все варианты 3-го хода, сделанного первым игроком. Выигрышным для второго игрока является 2-й или 4-й ход. Анализ таблицы показывает, что *второй игрок* *всегда может выиграть — при любых ходах первого игрока.* Для этого второй игрок должен придерживаться следующей **выигрышной стратегии:**

- если первый игрок первым ходом утраивает количество камней в одной из кучек, то второй игрок своим ответным ходом должен получить кучки (27;2) или (6;6);
- если первый игрок первым ходом увеличивает количество камней в одной из кучек на 3, то второй игрок ответным ходом должен получить кучки (6;5) или (6;6).

Таблица 3.4

Табличное описание дерева игры на 4 хода (ветви, приводящие к выигрышу 2-го игрока)

Исходное состояние	1-й ход	2-й ход	3-й ход	4-й ход
	1-й игрок (все варианты хода)	2-й игрок (выигрышный ход)	1-й игрок (все варианты хода)	2-й игрок (один из вариантов хода)
3;2	9;2	27;2	2-й игрок выиграл на 2-м ходу	
	3;6	6;6	18;6	54;6
			6;18	6;54
			9;6	27;6
			6;9	6;27
	6;2	6;6	(см. выше)	
		6;5	(см. ниже)	
	3;5	6;5	18;5	54;5
			6;15	6;45
			9;5	27;5
			6;8	6;24

Замечание. Обратите внимание на тот факт, что начиная со 2-го уровня дерева игры (после второго хода) некоторые вершины графа дублируются. Если на графе исключить дублирование, то он перестанет быть деревом.

Система основных понятий

Задачи теории игр
Игровые задачи стали предметом математических исследований еще в XVII веке. Возможность применения игровых моделей к экономике была рассмотрена и развита Дж. фон Нейманом и О. Моргенштейном (1944 г.)
Игра — соблюдаемые правила и условия, моделирующие реальную конфликтную ситуацию. **Игрок** — участник игры со своими целями, принимающий решения. **Конечная игра** приводит к заключительной позиции (выигрышу) за конечное число шагов. **Игра с полной информацией** означает, что игрок всегда знает, к какой позиции приведет выбранный им ход. **Стратегия** — возможная последовательность ходов игрока. **Выигрышная стратегия** — правило совершения ходов, при котором игрок добивается выигрыша при любых ответных ходах другого игрока

Вопросы и задания

1. Что такое игра, стратегия игры, выигрышная стратегия?
2. Приведите примеры игр с полной информацией.
3. Какая игра называется игрой с природой? Приведите примеры.
4. Что такое дерево игры? В каком виде его можно отображать?
5. Постройте в форме блок-схемы алгоритм игры с камнями, описанной в тексте параграфа, реализующий выигрышную стратегию для второго игрока: в роли первого игрока — человек (пользователь), в роли второго игрока — компьютер.

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.4.5. Пример математического моделирования для экологической системы

Математическое моделирование находит применение в биологической науке. В частности, с его помощью удается обобщить многочисленные наблюдения и обнаружить закономерности, которым подчиняются природные экологические системы — взаимодействующие сообщества различных организмов, животных и растений.

Постановка задачи

Рассмотрим один простой пример математического моделирования процессов, происходящих в экологической системе, состоящей из двух популяций живых организмов, одна из которых существует исключительно за счет поедания представителей другой. Такую систему принято называть «хищник–жертва». Это могут быть, например, волки и овцы, лисы и зайцы, щуки и караси и т. п. Уточним понятие «популяция». Оно означает совокупность особей одного вида, существующих в одно и то же время на определенной территории. Будем представлять себе, что жизнь этих двух популяций происходит на изолированном острове, где, кроме них, никого больше нет, но имеется в достаточном количестве корм для «жертв».

Имеется лишь один механизм взаимодействия между двумя видами животных — хищники поедают жертв, благодаря чему выживают и размножаются.

Ситуация в такой идеализированной системе не так проста, как может показаться на первый взгляд. Если хищники истребят всех особей из популяции жертв, то и сами погибнут от отсутствия корма, однако сплошь и рядом такого не происходит. Следовательно, природа устроена так, что в этой системе соблюдается определенное равновесие, и цель моделирования заключается в том, чтобы понять условия этого равновесия.

Построение математической модели

Построим дискретную модель динамики изменения численности популяций хищников и жертв. Пусть N_i — численность популяции жертв, C_i — численность хищников в некоторый момент времени t_i. Шаг по времени Δt — конечная величина. Примем $t_0 = 0$ — начальный момент времени наблюдений; $t_i = i \cdot \Delta t$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно подходу к дискретному моделированию динамических систем (см. параграф 3.1.2), модель динамики популяций жертв и хищников будет состоять из двух формул:

$$\begin{cases} N_{i+1} = N_i + DN_i \cdot \Delta t; \\ C_{i+1} = C_i + DC_i \cdot \Delta t. \end{cases} \tag{3.55}$$

Здесь DN_i — это скорость изменения численности жертв, а DC_i — скорость изменения численности хищников на i-м шаге по времени.

В рассматриваемой системе «хищник–жертва» происходят процессы, способствующие как **росту** численности популяций (скорость — положительная величина), так и **убыванию** численности (скорость — отрицательная величина). Теперь нам надо решить вопрос о способе вычисления значений DN_i и DC_i. Всякая модель строится на основе определенных допущений, подтверждаемых научными наблюдениями. В нашей модели будут приняты следующие допущения.

1. При отсутствии хищников скорость **роста** численности популяции жертв пропорциональна их количеству.
2. Вклад наличия хищников в скорость **убывания** популяции жертв пропорционален произведению численностей обеих популяций.
3. При отсутствии пищи (жертв) скорость **убывания** популяции хищников пропорциональна их численности.
4. Скорость **роста** популяции хищников благодаря поеданию жертв пропорциональна произведению численностей обеих популяций — с поправкой на эффективность рождения потомства у хищников в результате поедания жертв.

Вводя соответствующие параметры (коэффициенты пропорциональности) и заменяя величины DN_i и DC_i в формулах (3.55) на выражения, следующие из сформулированных выше допущений, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} N_{i+1} = N_i + (r \cdot N_i - a \cdot C_i \cdot N_i) \cdot \Delta t; \\ C_{i+1} = C_i + (f \cdot a \cdot C_i \cdot N_i - q \cdot C_i) \cdot \Delta t. \end{cases} \quad (3.56)$$

Коэффициенты, входящие в (3.56), можно, сообразно их смыслу, назвать так:

r — параметр скорости роста популяции жертв при отсутствии хищников (отражает допущение 1);

a — параметр эффективности поиска хищниками жертв (отражает допущение 2);

q — параметр скорости снижения популяции хищников при отсутствии пищи (отражает допущение 3);

f — параметр эффективности рождения потомства у хищников в результате поедания жертв (отражает допущение 4).

Значения параметров r, a, q, f могут быть определены только эмпирически, т. е. из экспериментальных наблюдений, на основании обработки полученных статистических данных. Параметры r, a, q имеют размерность, обратную размерности времени. Например, если с учетом медленности происходящих процессов (изменения численности популяций) за единицу времени принять 1 год, то размерность параметров r, a, q будет *год*$^{-1}$.

Пусть, например, $r = 1$ (*год*$^{-1}$). Что отсюда следует? Это значит, что численность жертв при отсутствии хищников за 1 год возрастет в 2 раза: $N_{i+1} = 2N_i$.

Параметр f — безразмерная величина. Пусть, например, $f = 0{,}1$. Что отсюда следует? Это значит, что в результате съедания 10 жертв поголовье хищников увеличится на 1 особь.

Что касается величины Δt, то ее можно интерпретировать двояко: либо как промежутки времени, через которые ведется наблюдение за численностями популяций, либо как некий условный шаг по времени, который связан с дискретным приближением к описанию реально происходящего непрерывного процесса. Действительно, процесс изменения численностей популяций непрерывен, а дискретизация связана с принятым нами способом приближенного описания непрерывных процессов. В этом смысле, чем меньше Δt, тем система уравнений (3.56) адекватнее описывает непрерывный динамический процесс.

Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент производится путем расчета численности популяций жертв и хищников N_i и C_i по формулам (3.56) в последовательные моменты времени t_i с шагом по времени Δt. В качестве исходных данных задаются численности популяций в начальный момент времени N_0 и C_0, шаг по времени Δt и параметры модели r, a, q, f.

На рисунке 3.49 в графическом виде представлены результаты вычислительного эксперимента на основании построенной математической модели. Начальные значения численностей популяций были заданы следующими: $N_0 = 200$, $C_0 = 25$. Параметры модели: $r = 5$; $a = 0{,}1$; $q = 5$; $f = 0{,}5$. При вычислениях использовался шаг по времени $\Delta t = 0{,}01$.

Из графиков видно, что численности обеих популяций изменяются в режиме сопряженных колебаний. Когда хищников ста-

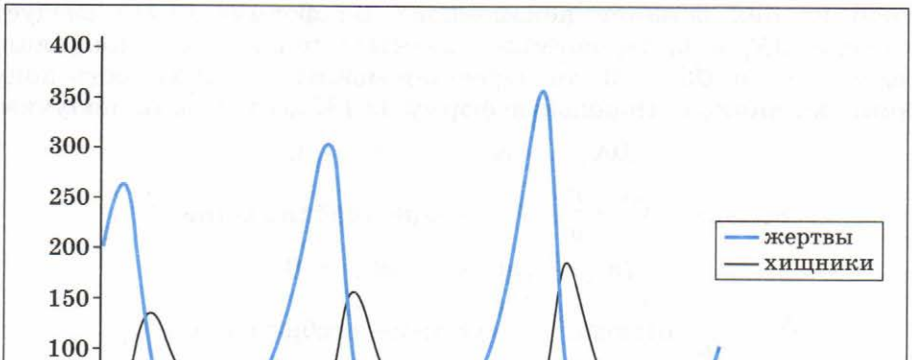


Рис. 3.49. Результат моделирования динамики численности популяций при значениях параметров: $r = 5$; $a = 0{,}1$; $q = 5$; $f = 0{,}5$; $\Delta t = 0{,}01$

новится слишком много, они сокращают популяцию жертв, но после этого (с некоторым запозданием) и их популяция сокращается из-за нехватки пищи, после чего популяция жертв снова начинает нарастать и т. д.

При рассмотрении рис. 3.49 может возникнуть вопрос: в каких единицах на нем измеряется время? Что означают числа по горизонтальной оси — оси времени? Это часы, дни, годы? Всё зависит от того, какая величина принята за единицу времени. Если считать что r, a и q измеряются единицей (*год*$^{-1}$), то единица измерения времени на оси абсцисс — *год*, а если считать, что r, a и q измеряются единицей (*день*$^{-1}$), то на оси абсцисс — *дни*. Последний вариант удобен, если моделируется взаимодействие популяций с коротким периодом существования и размножения особей. Такое измерение величин не в абсолютных, а в относительных единицах часто используется в математическом моделировании.

Качественная модель динамики популяций

На рисунке 3.49 проиллюстрирован частный случай, связанный с указанным набором параметров. А могут ли при других значениях параметров быть иные варианты развития событий? Обсудим картину изменения динамики численности популяций хищников и жертв качественно, не прибегая к расчетам по формулам (3.56).

Ответим вначале на вопрос, возможно ли такое соотношение размеров популяций, при котором численность, по крайней мере, одной из них остается неизменной? Из формул (3.55) следует, что если $DN_i = 0$, то перестает меняться численность популяции жертв, а если $DC_i = 0$, то перестает меняться численность популяции хищников. Используя формулы (3.55) и (3.56), получим:

$$DN_i = rN_i - aC_iN_i = 0;$$

отсюда: $C^* = \dfrac{r}{a}$ — условие стабилизации N_i.

$$DC_i = faC_iN_i - qC_i = 0;$$

$N^* = \dfrac{q}{fa}$ отсюда: — условие стабилизации C_i.

Нанесем прямые $N = N^*$ и $C = C^*$ на плоскость NC, любая точка на которой отражает состояние системы «хищник–жертва» (рис. 3.50). Эти прямые делят плоскость NC на четыре области, обозначенные на рисунке римскими цифрами. В части плоскости, лежащей *левее* прямой $N = N^*$ (области I и IV), выполняется неравенство $DC_i < 0$. Следовательно, $C_{i+1} < C_i$ — численность популяции хищников убывает. А в части плоскости, лежащей *правее* прямой $N = N^*$ (области II и III), $DC_i > 0$ — численность популяции хищников возрастает. Аналогично, в части плоскости, лежащей *ниже* прямой $C = C^*$, численность популяции жертв возрастает, а в части плоскости, лежащей *выше* прямой $C = C^*$, численность жертв убывает.

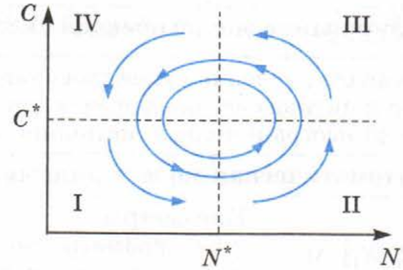


Рис. 3.50. Качественная модель динамики численности популяций хищников и жертв

Таким образом, четырем областям на плоскости NC (см. рис. 3.50) соответствуют четыре разных поведения системы «хищник–жертва»:

область I — N возрастает, C убывает;
область II — N возрастает, C возрастает;
область III — N убывает, C возрастает;
область IV — N убывает, C убывает.

Области I, II, III, IV называются *фазовыми областями состояния* рассматриваемой системы. Допустим, что начало процесса взаимодействия популяций приходится на точку, лежащую в фазовой области I. Численность популяции жертв будет возрастать, численность хищников — убывать, и продвижение на рис. 3.50 будет происходить в сторону, помеченную стрелочкой. Когда произойдет переход через границу областей I и II, численность хищников также начнет возрастать; затем она продолжит возрастать, а численность жертв будет убывать (область III). После перехода в область IV начнут убывать численности обеих популяций. Затем все циклически повторится.

Таким образом, сосуществование популяций происходит в режиме периодически повторяющихся переходов между четырьмя фазовыми областями состояния системы. Это приводит к сопряженным колебаниям численностей популяций хищников и жертв. К тому же выводу мы пришли на основании вычислительного эксперимента, выполненного для частного варианта параметров математической модели (3.56).

Колебательный характер изменения численностей хищников и жертв подтверждается практическими наблюдениями за такими природными системами. Следовательно, рассмотренная модель, несмотря на идеализацию и упрощение, правильно отражает процессы, происходящие в действительности.

Система основных понятий

Моделирование экологической системы	
Система «хищник–жертва», условия существования: популяция хищников живет за счет поедания жертв; популяция жертв имеет неограниченный источник питания	
Дискретная математическая модель динамики популяций	
Уравнения: $\begin{cases} N_{i+1} = N_i + (r \cdot N_i - a \cdot C_i \cdot N_i) \cdot \Delta t; \\ C_{i+1} = C_i + (f \cdot a \cdot C_i \cdot N_i - q \cdot C_i) \cdot \Delta t. \end{cases}$ N_i — численность жертв; C_i — численность хищников; Δt — шаг по времени	Параметры: r — параметр скорости роста популяции жертв при отсутствии хищников; a — параметр эффективности поиска хищниками жертв; q — параметр скорости снижения популяции хищников при отсутствии пищи (жертв); f — параметр эффективности рождения потомства у хищников в результате поедания жертв
Результат вычислительного эксперимента: сопряженные колебательные изменения численностей жертв и хищников	
Качественная модель динамики популяций	
На плоскости NC выделяются четыре фазовые области состояния системы, отличающиеся разным характером изменения численностей популяций. Динамика популяций происходит путем циклического перехода между фазовыми областями	

Вопросы и задания

1. Охарактеризуйте условия существования популяций в модели «хищник–жертва».
2. Перечислите все факторы, влияющие на изменение (рост и убывание) численностей популяций жертв и хищников.
3. Поясните смысл параметров r, a, q, f, входящих в дискретную математическую модель динамики популяций.
4. По какому принципу определялись положения границ между четырьмя фазовыми областями состояния системы?
5. На графиках, представленных на рис. 3.49, отметьте участки, соответствующие пребыванию системы в фазовых областях I, II, III, IV.

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.5. Имитационное моделирование

3.5.1. Методика имитационного моделирования

Признаки имитационной модели

При моделировании процессов, происходящих с реальными системами, возможны две ситуации:

1) поведение системы однозначно предсказуемо (говорят: детерминировано);
2) поведение элементов системы носит случайный характер.

В предыдущих разделах мы рассматривали моделирование процессов первого типа. Сейчас речь пойдет о моделировании процессов второго типа, которое называется **имитационным моделированием.**

В 8 классе вы уже знакомились с понятием имитационной модели. Напомним данное там определение: *имитационная модель воспроизводит поведение сложной системы, элементы которой могут вести себя случайным образом.*

Перечислим характерные признаки имитационного моделирования.

1. Объект моделирования — система, состоящая из множества взаимодействующих элементов.
2. Состояния элементов или производимые ими действия носят случайный характер.
3. Известны правила взаимодействия элементов, определяемые физическими, биологическими, экономическими и другими законами.
4. Метод — пошаговое (во времени) описание изменения состояния элементов системы.
5. Существуют интегральные (т. е. общие, суммарные, усредненные) характеристики состояния системы.
6. Цель моделирования — оценка изменения со временем интегральных характеристик системы через отслеживание всех актов взаимодействия элементов системы.

Как правило, результаты имитационного моделирования на компьютере визуализируют с помощью графической анимации. Рассмотрим примеры применения имитационного моделирования.

Броуновское движение

Броуновское движение — явление, открытое в 1827 году шотландским ботаником Робертом Броуном — явилось экспериментальным доказательством молекулярной структуры вещества. Оно состоит в том, что очень маленькая, но доступная наблюдениям частица, взвешенная в газе или в жидкости, под влиянием ударов множества молекул совершает хаотические движения. Броун наблюдал движение пыльцы растений в воде.

Для чего нужно моделировать такую систему? Дело в том, что сам факт хаотических движений пылинок дает качественное подтверждение наличия движущихся молекул. Однако научную интерпретацию явления может дать лишь подтвержденная расчетом закономерность — например, зависимость средней скорости движения броуновских частиц от температуры среды.

Объекты моделирования: броуновская частица (пылинка) и множество случайным образом движущихся молекул.

Случайные факторы: положение молекул в пространстве и скорости их движения.

Правила взаимодействия: закон сохранения импульса, если считать столкновения абсолютно упругими.

Интегральные характеристики: координаты и скорость броуновской частицы; температура среды, от которой зависит средняя скорость молекул.

Метод расчета: с малым шагом по времени рассчитываются изменения координат броуновской частицы и молекул с учетом их движений и столкновений (учитываются также столкновения со стенками сосуда).

Цель моделирования: описание траектории и скорости перемещения броуновской частицы в зависимости от температуры.

Модель можно сделать более сложной, если учитывать плотность среды, размер молекул и другие физические факторы.

На рисунке 3.51 показан интерфейс учебной программы, моделирующей броуновское движение[1]. На компьютере изображение динамическое. На левом кадре представлено состояние системы в

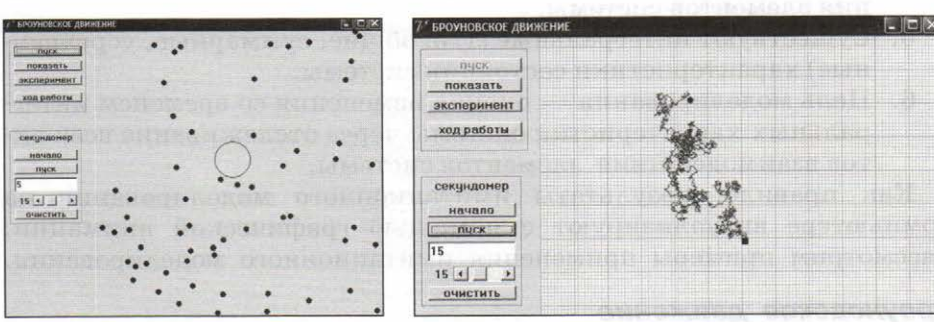


Рис. 3.51. Имитационное моделирование броуновского движения

1) Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов (http://school-collection.edu.ru). ЦОР к курсу физики для 10 класса. Ресурс № 133505 «Броуновское движение».

момент времени 5 секунд после начала эксперимента. На правом кадре — траектория, нанесенная на координатную сетку, пройденная броуновской частицей за 15 секунд. По анализу этой траектории можно оценить среднюю скорость частицы.

Другие примеры использования имитационного моделирования

Приведем еще несколько примеров имитационного моделирования (на уровне постановки задач).

Динамика популяций. Рассматриваются популяции различных видов животных, существующих на общей территории. Чаще всего эта задача формулируется в терминологии «хищник–жертва», например, для популяций волков и овец. Те и другие размножаются и умирают. Известны правила взаимодействия между ними: условия рождения нового животного и гибели существующего. Имитационная модель воспроизводит во времени судьбу каждой особи. В качестве интегральных характеристик выступает суммарное число хищников и жертв, которое со временем изменяется.

Политические выборы. Со словом «политтехнологии» мы встречаемся часто — например, в преддверии выборов. Иногда оно носит негативный смысл, но само по себе изучение настроения избирателей и влияние на него в пользу той или иной политической партии не есть нечто предосудительное, если такое влияние ведется без нарушения законов и принципов этики и морали.

Допустим, путем социологических исследований определена вероятность изменения политических симпатий лиц из определенного социального слоя к тому или иному действию (или заявлению) некоторой политической силы. Причем здесь речь может идти именно о вероятности — отдельно взятый человек не является тем объектом, на который можно политически воздействовать с достоверно предсказуемым результатом. Однако на уровне статистических зависимостей результаты политических действий могут быть вполне предсказуемыми. Один из возможных способов такого предсказания — имитационное моделирование, в котором элементами моделируемой системы являются некие абстрактные избиратели из разных возрастных, социальных, гендерных, национальных, религиозных и иных групп, вероятность индивидуальной реакции которых на политическое действие известна. Цель — предсказать усредненную реакцию такого коллектива избирателей на некоторую совокупность действий и заявлений политических сил, готовящих предвыборную кампанию.

Обслуживание очередей. Еще одним объектом для имитационного моделирования может быть очередь на обработку запросов в локальных компьютерных сетях, организованных по принципу «клиент–сервер», когда рабочая станция (клиент) посылает серверу запрос на обработку данных и ждет, пока сервер выполнит накопившиеся запросы других рабочих станций. Имитационному моделированию подлежит процесс формирования очереди и обслуживания запросов. Искомым результатом является среднее время ожидания клиентом обслуживания своего запроса. К этому примеру мы еще вернемся.

О результатах имитационного моделирования

Имитационные и детерминированные математические модели одной и той же предметной области взаимно дополняют друг друга. Если известно лишь поведение отдельных элементов изучаемой системы, их «реагирование» друг на друга и на внешние условия, то может оказаться, что построить динамическую модель невозможно и остается путь имитационного моделирования.

Имитационное моделирование — основа для многих серьезных приложений. Создание различных компьютерных тренажеров, например, стало массовым явлением при подготовке операторов систем на транспорте и ряде потенциально опасных производств. В основе таких тренажеров — имитационные модели.

Важная черта имитационного моделирования — его вероятностный характер. Полученный таким способом результат окажется выраженным не однозначным утверждением вроде такого: «за 10 минут работы сервер обслужит 253 запроса клиентов», а будет представлен в такой форме: «с вероятностью 95% за 10 минут работы сервер обслужит от 240 до 260 запросов клиентов». На самом деле такой ответ ничуть не хуже первого, а если вдуматься, то гораздо больше соответствует тому, что происходит в реальности. Не меньше оснований имеет использование имитационного моделирования при изучении сложных экономических, социальных и иных систем, поскольку вероятностный характер имитационной модели для них часто отражает случайный характер реальных событий, происходящих в этих системах.

Для программной реализации имитационных моделей используются языки программирования высокого уровня, табличные процессоры, инструментальные пакеты математических программ, такие как Mathcad, MATLAB, Maple и др. Существуют также специальные имитационные языки, например GPSS, GASP, Piligrim. Они используются для профессионального применения при решении определенных классов задач.

Система основных понятий

Методика имитационного моделирования					
Признаки имитационной модели					
Объект моделирования — система взаимодействующих элементов	Случайный (вероятностный) характер поведения элементов	Известны правила взаимодействия	Существуют интегральные характеристики состояния системы	Метод — пошаговый, описание изменения состояния элементов системы	Цель — оценка изменения интегральных характеристик
Примеры использования имитационного моделирования					
Броуновское движение	Динамика популяций	Политические выборы	Системы массового обслуживания	Тренажеры	
Интегральные оценки, полученные в результате имитационного моделирования, носят *вероятностный характер*					

Вопросы и задания

1. Для каких систем характерно применение метода имитационного моделирования?
2. Назовите основные свойства имитационной модели.
3. Почему моделирование броуновского движения названо имитационным? Где в этой модели присутствует случайность? Какие интегральные характеристики определяются в этой модели?
4. Можно ли реализовать имитационную модель «вручную»? Какие возможности компьютера используются в имитационном моделировании?
5. Попробуйте описать по шести приведенным в тексте параграфа признакам постановку задачи имитационного моделирования для системы движения городского транспорта.
6. Приведите примеры систем, которые, по вашему мнению, могут быть объектами имитационного моделирования. Назовите элементы систем, характер взаимодействия между ними и интегральные характеристики системы.

3.5.2. Математический аппарат имитационного моделирования

Случайные величины и вероятность

Основу математического аппарата имитационного моделирования составляют теория вероятностей и математическая статистика. Выше использовались такие выражения, как «с некоторой вероятностью», «случайным образом распределены», «случайным образом перемещаются» и т. п. При этом термин «случайный» подразумевает наличие некоторых законов, регламентирующих «случайности»; в соответствии с этими законами разыгрываются элементарные акты имитационного моделирования, например такие, как направления движения броуновских частиц и молекул.

Приведем некоторые сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для понимания того, как строятся и используются имитационные модели. Событие называется **случайным**, если оно непредсказуемо достоверно. Случайная величина X называется **дискретной**, если набор всех ее значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно пронумеровать (этот набор может быть и бесконечным). Примером дискретной случайной величины является номер шара, выпавшего из лотерейного барабана. Если, допустим, всего 60 шаров, то x_i могут принимать целые значения от 1 до 60. Выпадения шаров с разными номерами — *равновероятные события*.

Понятие вероятности в математике определяется так: **вероятность** *равна отношению числа исходов, благоприятствующих данному событию, к общему числу равновозможных исходов.* В примере с шарами общее число равновозможных исходов равно 60, а число исходов для каждого номера равно единице (шар один). Поэтому вероятность (обозначим ее p_i) для каждого шара равна 1/60: $p_1 = \ldots = p_{60} = 1/60$.

Значение вероятности лежит в диапазоне от 0 до 1. Вероятность невозможного события равна нулю, например, вероятность достать из нашего лотерейного барабана шар с номером 100 равна нулю, потому что там нет такого шара. Вероятность достоверного события равна 1. Например, если бы в барабане был всего один шар и на нем стоял бы номер 60, вероятность его выпадения была бы равна 1. В общем случае всевозможные исходы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайного события могут иметь разные вероятности: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Но, во-первых, каждая из них лежит в диапазоне от 0 до 1; во-вторых, они нормируются относительно друг друга таким образом, что их сумма равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Если вероятности известны, то говорят, что задано **распределение случайной величины** X. Именно наличие такого распределения делает возможной последующую математическую обработку.

Важнейшими характеристиками случайной величины являются среднее значение и дисперсия. Для дискретной случайной величины X с конечным набором значений $\{x_i\}$ **среднее значение** вычисляется по формуле:

$$\overline{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n . \qquad (3.57)$$

Дисперсией дискретной случайной величины X называется величина

$$DX = p_1 (x_1 - \overline{x})^2 + p_2 (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + p_n (x_n - \overline{x})^2 . \qquad (3.58)$$

Если дисперсия равна нулю, то это может лишь означать, что случайная величина принимает единственное возможное значение x, т. е., по существу, не является случайной. Большая же дисперсия указывает на большое рассеяние случайной величины, т. е. на то, что вероятности того, что случайная величина будет принимать значения, существенно отличающиеся от среднего, не малы.

Плотность вероятности

Случайная величина может быть не только дискретной, но и **непрерывной**, если ее возможными значениями являются любые числа из некоторого отрезка $[a, b]$. Пример непрерывной случайной величины: результаты измерения температуры тела у множества людей, например пациентов больницы. Диапазон возможных значений можно принять таким: [25 °C, 45 °C]. Теоретически возможны непрерывные случайные величины с бесконечным диапазоном значений: от $-\infty$ до ∞.

Для непрерывно распределенной случайной величины x большую роль в ее описании играет **функция распределения плотности вероятности**, которую будем обозначать $p(x)$. Содержательный смысл $p(x)$ заключается в том, что для всякой точки $x_0 \in [a, b]$ и взятого около нее малого отрезка Δx произведение $p(x_0)\Delta x$ равно вероятности того, что случайная переменная примет значение, заключенное между x_0 и $x_0 + \Delta x$.

Рассмотрим характерные распределения случайных величин.

Равномерное распределение. Распределение называется *равномерным* (равновероятным) на отрезке $[a, b]$, если вероятность того, что случайная величина X примет значение вблизи любой точки x_0 этого отрезка, не зависит от x_0. Тем самым $p(x)$ — константа. Значение этой константы находим из условия нормировки, которое на графике функции $p(x)$ означает, что площадь фигуры, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху — линией $y = p(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, равна единице (рис. 3.52). Отсюда следует

$$p(x) = \frac{1}{b-a}. \quad (3.59)$$

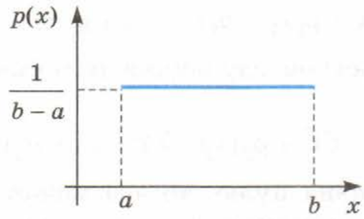


Рис. 3.52. Плотность вероятности равномерного распределения

У формул для среднего значения (3.57) и дисперсии (3.58) есть аналоги для непрерывно распределенных случайных величин. В этих аналогах вместо сумм фигурируют интегралы. Эти интегралы можно вычислить, если известен вид функции $p(x)$. Для равномерного распределения такие вычисления дают:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (3.60)$$

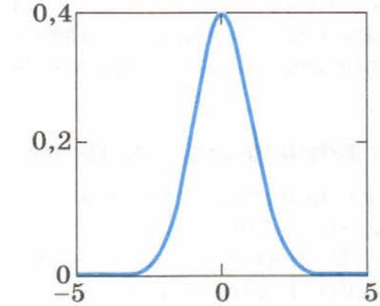
Нормальное распределение. Важную роль в теории вероятностей и ее приложениях играет нормальное распределение случайной величины, имеющее вид:

$$p(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}. \quad (3.61)$$

Здесь $-\infty < x < \infty$; величины a и s — параметры распределения, $s > 0$. Функция (3.61) имеет максимум при $x = a$; ее график симметричен относительно этой точки. Параметр s определяет максимальное значение $p(x)$ и «ширину» распределения (на высоте, равной половине максимальной, ширина распределения равна s). Типичный вид плотности вероятности нормального распределения приведен на рис. 3.53. Нормальное распределение называют **распределением Гаусса**. Например, значения скорости молекул в газе или жидкости (например, в модели для броуновского движения) распределены по нормальному закону. Величина a — это приблизительное значение скорости, которую имеют большинство молекул и которая растет с ростом температуры среды.

$s := 1$

$$p(x) = \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2s^2}\right)}{s \cdot \sqrt{2\pi}}$$



$s := 2$

$$p(x) = \frac{\exp\left(\frac{-x^2}{2s^2}\right)}{s \cdot \sqrt{2\pi}}$$

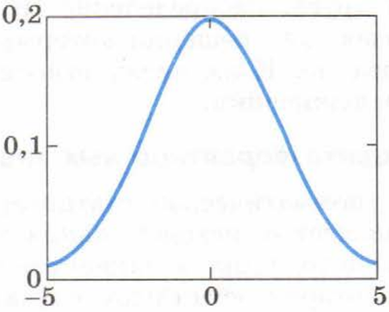


Рис. 3.53. Нормальное распределение для случая $a = 0$, при $s = 1$ и при $s = 2$. Чем больше s, тем кривая распределения ниже и шире (значение s определяет ширину распределения на половине высоты)

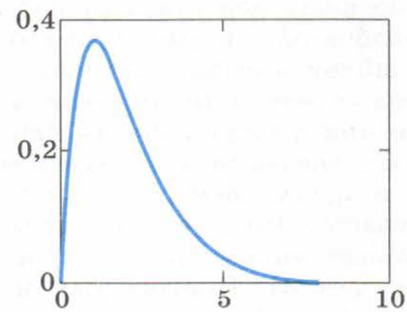
Распределение Пуассона. Рассмотрим еще одно распределение непрерывной случайной величины — *распределение Пуассона*:

$$p(x) = \frac{x^n}{n!}\exp(-x). \tag{3.62}$$

Здесь $0 < x < \infty$, n — целочисленный параметр ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Иллюстрации к распределению Пуассона приведены на рис. 3.54.

$n := 1$

$$p(x) := x^n \cdot \frac{\exp(-x)}{n!}$$



$n := 2$

$$p(x) := x^n \cdot \frac{\exp(-x)}{n!}$$

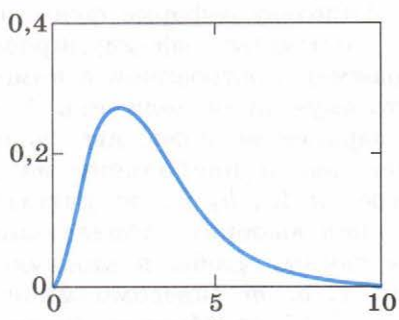


Рис. 3.54. Распределение, соответствующее функциям Пуассона, при $n = 1$ и при $n = 2$. Чем больше n, тем кривая распределения ниже и шире. При $n \geq 10$ распределение Пуассона становится визуально похожим на нормальное распределение

Это распределение моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Распределение Пуассона играет ключевую роль в ряде задач, для решения которых используется имитационное моделирование. К их числу относится моделирование систем массового обслуживания.

Оценка вероятностных характеристик случайного процесса

В математической статистике существует понятие **выборки**: это множество исходов каких-либо однородных наблюдений (т. е. происходящих в одинаковых условиях). В любом эксперименте, в котором участвуют случайные величины (неважно, натурном или компьютерном), получается **случайная выборка** $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторого практически недоступного в полном объеме набора значений величины X.

По результатам выборки могут решаться разные задачи:

1) сделать заключение о том, какой вид имеет функция распределения величины X (это максимально возможная информация при вероятностном подходе);
2) если невозможно решение первой задачи, то хотя бы определить значения наиболее часто используемых параметров распределения, таких как среднее значение и дисперсия.

Ответить на эти вопросы со стопроцентной надежностью по одной случайной выборке невозможно. Обычный вид ответа таков: «Среднее значение лежит в таком-то интервале с такой-то достоверностью».

Гипотезу о форме функции $p(x)$ (плотности вероятности) можно попытаться сформулировать по столбчатой диаграмме (гистограмме), построенной с помощью случайной выборки. Допустим, что случайная величина X ограничена отрезком $[a, b]$ (если a, b заранее не известны, то в качестве них можно принять наименьшее и наибольшее из выборочных значений x). Разделим отрезок $[a, b]$ на m равных частей и подсчитаем n_i — число членов выборки, попадающих в i-й участок (при этом m берется таким, чтобы в каждую часть попало много членов выборки, т. е. m заведомо много меньше, чем n). Приведенная на рис. 3.55 столбчатая диаграмма (гистограмма), ординаты горизонтальных отрезков на которой равны (с учетом нормировки) отношениям $\frac{n_i}{nh}$, где $h = \frac{b-a}{m}$, дает наглядное представление о характере распределения.

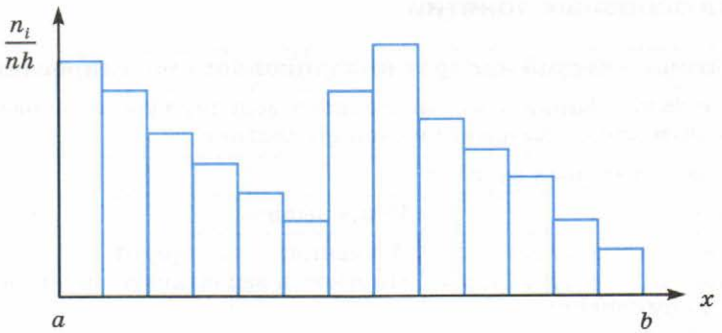


Рис. 3.55. Пример столбчатой диаграммы распределения для случайной выборки

Разумеется, каждое из чисел n_i является случайным и в различных выборках будет различным. Однако если в нескольких больших по объему выборках числа n_i в пределах каждого из участков почти совпадут, то можно взять усредненные по выборкам значения, провести «на глазок» кривую через центры участков и попытаться сравнить, с какой из известных функций распределения она схожа. Для более строгого решения этой задачи в математической статистике используются специальные методы. Приближенное среднее значение при работе с выборкой можно оценить по формуле:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n), \qquad (3.63)$$

приближенное значение дисперсии, обозначаемое S^2 (S называется «выборочное среднеквадратическое отклонение») — по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2]. \qquad (3.64)$$

При малом объеме выборки значения (3.63) и (3.64) могут быть далеки от истинных значений среднего и дисперсии. Для установления правдоподобного значения среднего можно использовать следующий эмпирический прием — сделать несколько больших выборок, сравнить полученные в них значения x и считать условно достоверными те десятичные знаки, которые устойчиво воспроизводятся. Аналогичным образом можно оценить правдоподобное значение дисперсии.

Система основных понятий

<table>
<tr><th colspan="6">Математический аппарат имитационного моделирования</th></tr>
<tr><td colspan="6">Математический аппарат имитационного моделирования основан на теории вероятностей и математической статистике</td></tr>
<tr><td colspan="6">Множество случайных величин</td></tr>
<tr><td colspan="3">Дискретное</td><td colspan="3">Непрерывное</td></tr>
<tr><td colspan="3">Значения: $x_1, x_2, \dots, x_n$
Вероятности: $p_1, p_2, \dots, p_n$.
Условие нормировки:
$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$</td><td colspan="3">Значения: $x \in [a, b]$
Плотность вероятности: функция $p(x)$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Характеристики случайной величины</th></tr>
<tr><td colspan="3">Среднее значение (для дискретных значений):
$\overline{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$</td><td colspan="3">Дисперсия (для дискретных значений):
$DX = p_1(x_1 - \overline{x})^2 + p_2(x_2 - \overline{x})^2 + \dots + p_n(x_n - \overline{x})^2$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Примеры непрерывных распределений случайных величин</th></tr>
<tr><td colspan="2">Равномерное
$p(x) = \dfrac{1}{b-a}$</td><td colspan="2">Нормальное (Гаусса)
$p(x) = \dfrac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$</td><td colspan="2">Пуассона
$p(x) = \dfrac{x^n}{n!}\exp(-x)$</td></tr>
<tr><td colspan="6">Вероятности случайных событий, разыгрываемых в процессе имитационного моделирования, регулируются функциями распределения. Параметры, входящие в эти функции, не являются случайными величинами, что определяет возможность делать достоверные выводы по итогам моделирования</td></tr>
</table>

Вопросы и задания

1. Какое событие называется случайным?
2. В чем разница между дискретными и непрерывными случайными величинами? Приведите примеры.
3. Что такое вероятность?
4. Какой смысл несет функция распределения (плотность вероятности) случайной величины?
5. Чему равно среднее значение равномерно распределенной дискретной случайной величины с набором значений $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?
6. Чему равна плотность вероятности равномерного распределения на отрезке $[-2, 5]$?
7. Чему равны среднее значение и дисперсия непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[-2; 5]$?
8. Докажите, что по описанным правилам построения диаграммы случайной выборки (см. рис. 3.55) будет выполняться условие нормировки, т. е. сумма площадей столбцов диаграммы будет равна единице.

3.5.3. Генерация случайных чисел с заданным законом распределения

При компьютерном имитационном моделировании нельзя обойтись без наборов так называемых **«случайных чисел»** (псевдослучайных чисел), удовлетворяющих заданному закону распределения. Для решения не слишком сложных задач генерация равномерно распределенных псевдослучайных чисел реализуется с помощью **датчиков** — стандартных функций, встроенных в большинство языков программирования и прикладных программ для математических расчетов. Рассмотрим примеры.

Паскаль. Случайные числа, равномерно распределенные в диапазоне [0, 1), генерирует функция `random` (без аргументов). Каждое обращение к ней — очередное случайное число. Ее использованию обычно предшествует оператор `randomize`, служащий для начальной настройки датчика, т. е. получения при каждом запуске программы разных последовательностей случайных чисел.

Microsoft Excel. Функция СЛЧИС генерирует случайные числа, равномерно распределенные в полуинтервале [0, 1), и имеет следующий синтаксис: =СЛЧИС(). Функция СЛЧИС не имеет аргументов, но после имени функции необходимо вводить круглые скобки. Значение функции СЛЧИС изменяется при каждом пересчете рабочего листа.

Располагая датчиком равномерно распределенных случайных чисел, генерирующим числа $r \in [0, 1)$, легко получить равномерно распределенные случайные числа в произвольном полуинтервале $[a, b)$, проецируя на него интервал [0, 1):

$$x = a + (b - a) \cdot r. \tag{3.65}$$

Равномерно распределенные случайные числа — простейший случай. Более сложные распределения часто строятся с помощью равномерного распределения.

Для генерации случайных чисел с неравномерным законом распределения вероятности существует несколько способов. Большинство из них связаны с трансформацией последовательности равномерно распределенных случайных чисел в другую последовательность, соответствующую заданному закону распределения (эти способы лежат за пределами школьной математики). Следует также иметь в виду, что многие математические пакеты имеют встроенные средства для генерации случайных чисел с различными законами распределения.

Существует, однако, метод, в принципе пригодный для формирования последовательностей псевдослучайных чисел с произвольным законом распределения и не требующий больших математических познаний — **метод отбора–отказа**; в основе него лежит простое геометрическое соображение. Допустим, что необходимо генерировать последовательность случайных чисел в соответствии с некоторой функцией распределения $p(x)$ на интервале (a, b). Введем положительно определенную функцию сравнения $w(x)$ такую, что $w(x) = \text{const}$ и $w(x) > p(x)$ на (a, b); обычно $w(x)$ полагают равной максимальному значению $p(x)$ на (a, b). Генерируем два случайных числа, определяющих равновероятные координаты в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 3.56), с помощью датчика равномерно распределенных на соответствующих отрезках случайных чисел:

$$x = a + (b - a) \cdot r, \qquad y = w \cdot r, \tag{3.66}$$

где r — случайное число на отрезке $[0, 1)$ с равномерным законом распределения.

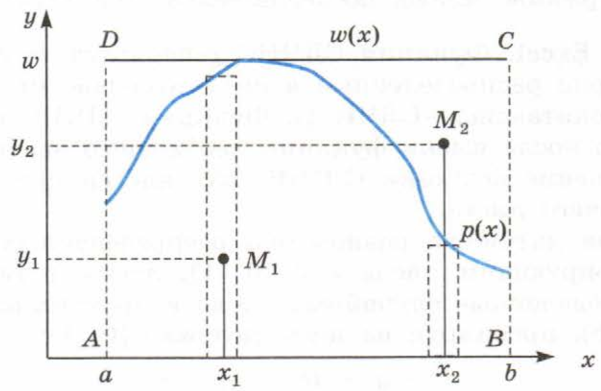


Рис. 3.56. К методу отбора–отказа (значение x_1 включается в искомый набор, значение x_2 не включается)

Если точка с координатами (x, y) не попадает под кривую $y = p(x)$, то ее следует отбросить, а если попадает, то ее x-координату следует включить в искомый набор. На рисунке 3.56 x_1 — координата точки M_1 включается в набор, а x_2 — координата точки M_2 отбрасывается. Полученное таким образом множество x-координат оставленных точек оказывается распределенным в соответствии с функцией плотности вероятности.

Идею метода отбора–отказа можно объяснить следующим образом. Обратите внимание на два пунктирных прямоугольника на рис. 3.56, построенные в окрестностях координат x_1 и x_2. Ширина у них одинаковая (обозначим Δx), а высота разная:

$p(x_1) > p(x_2)$. Нетрудно понять, что при равномерном заполнении прямоугольника $ABCD$ случайными точками в левый пунктирный прямоугольник попадет больше точек, чем в правый, из-за разницы их площадей. Следовательно, в формируемом наборе случайных чисел окажется больше значений в окрестности x_1, чем в окрестности x_2. Их количества будут относиться друг к другу как $p(x_1)/p(x_2)$.

Ниже приведена программа на Паскале, позволяющая строить по этому методу последовательность псевдослучайных чисел, распределенных в соответствии с функцией Пуассона при $n = 2$. Выборка случайных чисел осуществляется в полуинтервале [0, 10), верхняя граница (значение w на рис. 3.56) принята равной 0,3, что несколько больше максимума функции Пуассона.

Полученные числа использованы для построения столбчатых диаграмм (рис. 3.57). Число столбцов диаграммы взято равным 20. Этого вполне достаточно для визуального сопоставления диаграммы и графика распределения Пуассона (см. рис. 3.54).

```
Program Sluch_chisla;
Const Ntab=10000;   // Объем выборки случайных чисел
Var i, j, k: integer; a: real; z: array [1..Ntab] of real;
   b: array [1..20] of real; c: array [1..21] of real;
//Процедура заполнения массива Tab случайными пуассоновскими
//числами
Procedure Puasson(n: integer; Ax, Ay: real;
                  Var Tab: array [1..Ntab] of real);
Var x, y: real; i: integer;
begin
  i:=1;
  while i<=Ntab do
  begin
    X:=random*Ax; y:=random*Ay;
    if y<(power(x,n)*exp(-x)/n) Then
    begin Tab[i]:=x; i:=i+1  End
  end
end {Procedure Puasson};

begin
  randomize;
  //Обращение к процедуре Puasson при n=2, Ax=10, Ay=0,3
  //Результат в массиве z
  Puasson(2, 10, 0.3, z);

  //Подготовка данных для диаграммы распределения
  k:=20; //k - количество столбцов диаграммы
  //Формирование массива абсцисс для диаграммы
```

```
 for i:=1 to k+1 do c[i]:=(i-1)*10/k;

 //Подсчет числа попаданий в каждый из k интервалов значений
 for i:=1 to k do
 begin
   b[i]:=0;
   for j:=1 to Ntab do
     if ((z[j]>c[i]) and (z[j]<=c[i+1])) Then b[i]:=b[i]+1
 end;

 //Нормировка результата и вывод распределения
 //в дискретном виде
 for i:=1 to k do b[i]:=b[i]/Ntab*2;   //так как h=1/2
 for i:=1 to k dO
   Writeln ('I=', i:4, ' c=', c[I]:6:2, '  b=', b[i]:8:4)
end.
```

Если полученные в данной программе результаты перенести в электронную таблицу, то можно построить гистограмму распределения. Два варианта гистограммы показаны на рис. 3.57. Обе гистограммы получены на выборках из 10 000 точек. Даже при таком большом объеме выборки видны некоторые различия между вариантами, хотя качественно обе гистограммы воспроизводят точное распределение Пуассона, приведенное на рис. 3.54.

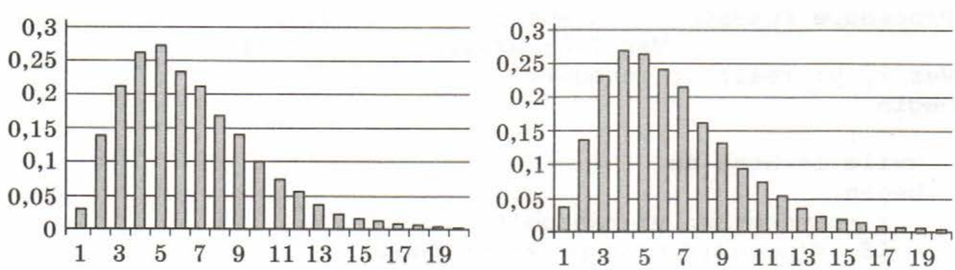


Рис. 3.57. Два варианта гистограммы распределения Пуассона, полученного методом отбора–отказа, для различных выборок из 10 000 точек

Система основных понятий

Случайные числа и их распределение
Последовательности случайных чисел, распределенных в соответствии с заданным законом, являются необходимым элементом имитационного моделирования

При компьютерной (программной) реализации используется последовательность случайных чисел, которая отражает заданный закон распределения
Основой генерации случайных чисел в большинстве языков программирования является генерация в соответствии с равномерным распределением. Последовательности случайных чисел с другими законами распределения могут быть получены из последовательности равномерно распределенных случайных чисел программным путем

Вопросы и задания

1. Приведите формулы равномерного распределения, нормального распределения случайных величин.
2. Что такое случайное число? Как получают последовательности равномерно распределенных случайных чисел в разных системах программирования?
3. В чем состоит метод отбора–отказа?
4. Какое изменение нужно произвести в программе `Sluch_chisla` для получения случайной последовательности чисел, подчиняющихся распределению Гаусса?

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.5.4. Постановка и моделирование задачи массового обслуживания

В чем состоит проблема очереди

Очереди — неизбежные спутники нашей жизни. Очереди в кассу — в магазине, при покупке железнодорожных и других билетов, в банке и т. д. — хорошо знакомы каждому. Очереди бывают и в технических системах, например в системах связи. Если телефон вызываемого абонента занят, то одна из стратегий обслуживания — поставить клиента в очередь, пока телефон не освободится. В телекоммуникационных системах очереди возникают при обслуживании запросов к базе данных в локальной компьютерной сети, организованной по принципу «клиент–сервер», когда рабочая станция (клиент) посылает серверу запрос на обработку данных и ждет, пока сервер выполнит накопившиеся запросы от других рабочих станций.

Стратегии формирования очереди противостоит другая стратегия, хорошо нам знакомая в традиционно организованном телефонном обслуживании. Короткие гудки, которые мы слышим, когда вызываемый абонент занят, свидетельствуют о том, что нас просто отключили от сети и, если мы хотим все же дозвониться, то надо снова набирать желаемый номер.

На первый взгляд, стратегия обслуживания с формированием очереди для клиентов удобнее. Тем не менее в ней также есть потенциальный риск для клиентов. По мере увеличения их числа (либо по мере усложнения запросов и тем самым продолжительности обслуживания, либо в силу и той, и другой причин одновременно) очередь может нарастать и создавать неудобства для клиентов. Более того, может возникнуть *кризис очереди*, когда запросы накапливаются быстрее, чем обслуживаются, и в разумный промежуток времени очередь до клиента не дойдет вообще. Действительно, если, например, человек хочет купить билет на поезд, отходящий через час, то ожидание ответа на запрос больше часа делает ситуацию бессмысленной.

Какой может быть выход из ситуации с формированием неприемлемо (для клиента) длинной очереди? Организатор обслуживания может: нанять второго продавца (если это магазин), установить параллельную линию связи и дополнительное оборудование (если это телефонная станция), установить более мощный компьютер-сервер, что ускорит транзакции (если это обслуживание запросов пользователей базы данных) и т. д. Однако каждый из этих вариантов в масштабах соответствующего предприятия весьма затратен, и перед тем, как на него решиться, разумно провести моделирование ситуации с целью выбора оптимального решения.

Следует учесть, что выше описана самая простая стратегия обслуживания клиентов в системе с очередью. На самом деле ситуация может осложняться разными дополнительными факторами. Например, при обслуживании клиентов в банке обычно VIP-клиенты обслуживаются вне очереди, при обработке запросов к базе данных часто есть приоритетные пользователи, которые обслуживаются либо вне очереди, либо быстрее других. Наличие приоритетов усложняет как постановку задачи, так и процедуру ее решения.

Постановка и решение описанной выше задачи ведется на языке математики. Поскольку момент появления нового участника очереди и продолжительность его обслуживания — величины случайные, для моделирования необходимо знать законы распределения этих величин. Их можно получить либо экспериментально, регистрируя на протяжении некоторого времени промежутки между запросами и продолжительности транзакций и строя столбчатые диаграммы типа приведенной на рис. 3.55, либо принимая некоторые модельные гипотезы. Для понимания существа дела и отработки навыков имитационного моделирования вполне годится использование равномерного распределения. Если же запросы к очереди происходят с известной средней интенсивностью и независимо друг от друга, то в качестве гипотезы обычно принимается распределение Пуассона с некоторым экспериментально подбираемым значением параметра n.

Имитационное моделирование очереди

На какие вопросы требуется получить ответы при моделировании очереди? Можно сформулировать несколько таких вопросов, но основной вопрос, связанный с ожиданиями участников очереди, на математическом языке звучит так: *какова функция распределения времени ожидания*? Зная ее, легко получить ответ на ряд более простых вопросов: какова средняя продолжительность ожидания и т. д.

Математическая дисциплина, решающая такого рода задачи, называется **теорией массового обслуживания**. Она возникла в начале XX века в связи с выработкой оптимальных стратегий организации работы телефонных сетей. Затем эту теорию стали применять для оптимизации очередей в самых различных ситуациях. Получение аналитического решения возможно лишь для ограниченного круга задач. Применение компьютеров для имитационного моделирования очередей значительно расширило приложения теории массового обслуживания.

Пусть длительности промежутков времени между поступлениями в очередь новых участников распределены в соответствии с некоторой функцией распределения $p_A(t)$, а продолжительности обслуживания — с функцией $p_B(t)$. Будем для простоты считать, что эти события не зависят друг от друга (в реальности это не всегда так). В простейшей модели, которую мы сейчас рассматриваем, нет привилегированных участников очереди.

Создадим таблицу для размещения данных (табл. 3.5). В ней в первом столбце — номера участников очереди (в порядке поступления), в столбце A записаны случайные числа — промежутки времени между появлениями участников, в столбце B — случайные числа — длительности обслуживания. В таблице должно быть достаточно много строк для того, чтобы выборки $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ с высокой мерой достоверности отражали характер законов распределения, заданных функциями $p_A(t)$ и $p_B(t)$. Остальные столбцы предусмотрены для удобства анализа; входящие в них числа находятся путем элементарного расчета. В столбце C представлено условное время прихода участника очереди. Это время отсчитывается от момента начала обслуживания первого клиента. Столбец D — время начала обслуживания клиента, E — время конца обслуживания, F — время, потраченное участником очереди в целом, G — длительность времени ожидания обслуживания.

Таблица 3.5

Таблица размещения данных для моделирования очереди

№ п/п	A	B	C	D	E	F	G
1	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1
2	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	g_2
...	...	...	...	...	...	...	...
n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n

Приведем формулы для расчетов величин c_i, d_i, e_i, f_i, g_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$):

$$c_1 = 0, \qquad c_{i+1} = c_i + a_{i+1};$$

$$d_1 = 0, \qquad d_{i+1} = \max(c_{i+1},\ e_i),$$

так как начало обслуживания очередного клиента определяется либо моментом его запроса, если сервер свободен, либо моментом окончания предыдущего запроса;

$$e_i = d_i + b_i;$$

$$f_i = e_i - c_i;$$

$$g_1 = 0, \quad g_{i+1} = f_{i+1} - b_{i+1}.$$

Законы, по которым распределены числа в столбцах F и G, дают ответ на поставленный выше вопрос. Установить вид соответствующих функций распределения можно, построив гистограммы типа той, что изображена на рис. 3.55.

Вычислительные эксперименты в электронной таблице

Несложно организовать описанные вычисления по моделированию очереди с помощью электронной таблицы.

Эксперимент 1. Пусть промежутки времени между появлениями запросов клиентов подчиняются равномерному закону распределения в полуинтервале значений от 0 до P минут (будем единицу времени называть минутой), а длительность обслуживания клиента — равномерно распределенная случайная величина в полуинтервале от 0 до Q минут.

По образцу таблицы 3.5 создадим электронную таблицу. На рисунке 3.58 приведены результаты расчета с помощью такой таблицы для значений $P = 10$ мин, $Q = 10$ мин.

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	7,26	4,97	0,00	0,00	4,97	4,97	0,00	P=	10
2	6,03	9,71	6,03	6,03	15,74	9,71	0,00	Q=	10
3	7,97	9,39	14,00	15,74	25,13	11,13	1,74		
4	5,15	6,69	19,15	25,13	31,82	12,67	5,98		
5	1,69	6,33	20,84	31,82	38,15	17,31	10,98		
6	0,48	2,51	21,32	38,15	40,66	19,33	16,83		
7	3,20	5,91	24,52	40,66	46,57	22,05	16,14		
8	9,86	1,85	34,38	46,57	48,42	14,04	12,19		
9	8,53	7,99	42,91	48,42	56,41	13,50	5,51		
10	6,92	1,59	49,83	56,41	58,00	8,17	6,58		
			Среднее время ожидания:				7,59		

Рис. 3.58. Эксперимент 1. Имитационное моделирование очереди

Таблица содержит информацию об обслуживании десяти клиентов. В ячейки столбца А помещена формула =$I$1*СЛЧИС(), а в ячейки столбца В — формула =$I$2*СЛЧИС(). Функция СЛЧИС() получает случайные числа в полуинтервале [0, 1), распределенные по равномерному закону. Умножение на какое-то значение X растягивает этот диапазон в X раз.

Отсчет времени начинается с момента появления запроса от первого клиента. Обслуживание всей очереди происходило примерно в течение часа (58 мин). Первый и второй клиенты не тратили время на ожидание обслуживания (столбец G). Последующим клиентам пришлось дожидаться. Дольше всех своей очереди ждал 6-й клиент — 16,83 мин. Среднее время ожидания одним клиентом своей очереди на обслуживание составило 7,59 мин.

Эксперимент 2. Все то же самое, как и в предыдущем эксперименте, но максимальное время обслуживания сократилось в два раза: $Q = 5$ мин.

Результаты эксперимента приведены на рис. 3.59. Время ожидания в очереди существенно сократилось. Не повезло клиенту номер 3, которому пришлось ждать обслуживания более 4 мин. Десять клиентов обслужены за 37 мин, среднее время ожидания обслуживания равно 0,72 мин.

№	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4,86	4,92	0,00	0,00	4,92	4,92	0,00	P=	10
2	9,75	4,92	9,75	9,75	14,67	4,92	0,00	Q=	5
3	0,59	1,78	10,34	14,67	16,45	6,10	4,32		
4	5,49	1,78	15,83	16,45	18,23	2,39	0,62		
5	2,58	0,16	18,41	18,41	18,57	0,16	0,00		
6	0,24	1,06	18,66	18,66	19,72	1,06	0,00		
7	6,80	1,24	25,45	25,45	26,70	1,24	0,00		
8	1,86	4,13	27,32	27,32	31,44	4,13	0,00		
9	1,84	3,58	29,16	31,44	35,02	5,86	2,28		
10	7,74	0,16	36,90	36,90	37,05	0,16	0,00		
			Среднее время ожидания:				0,72		

Рис. 3.59. Эксперимент 2. Имитационное моделирование очереди

Эксперименты в учебной программе «Имитационное моделирование»

На рисунке 3.60 показано изображение в окне учебной программы «Имитационное моделирование».

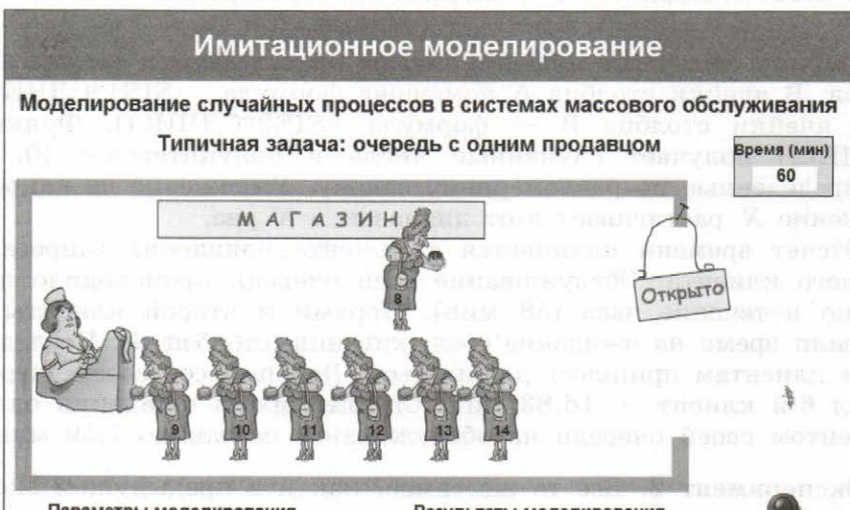


Рис. 3.60. Эксперимент в учебной программе. Вариант данных: A = 10, B = 10

Учебная программа в анимационной форме имитирует реальный процесс обслуживания очереди в магазине с одним продавцом. Входными параметрами являются: A — максимальное время между приходами двух последовательных покупателей (в электронной таблице эта величина обозначалась буквой P); B — максимальное время обслуживания продавцом одного покупателя (в электронной таблице — Q); C — длина очереди, при которой покупатель отказывается от обслуживания (уходит из магазина). На рисунке 3.60 отображена ситуация в магазине через 1 час после начала работы. Были установлены следующие значения параметров: $A = 10$ мин, $B = 10$ мин, $C = 6$ человек. За время эксперимента отказов от обслуживания не произошло. К концу эксперимента обслужено 8 покупателей, образовалась очередь из 6 человек, среднее время пребывания покупателя в очереди — 9,2 мин.

На рисунке 3.61 отражены результаты эксперимента для значений $A = 10$ мин, $B = 5$ мин, т. е. продавец стал работать быстрее в 2 раза. В результате за 1 час было обслужено 13 покупателей, среднее время ожидания покупателем обслуживания равно 0,3 мин. По порядкам величин результаты, полученные с помощью учебной программы, соответствуют результатам, полученным выше в электронной таблице. Еще раз отметим, что в силу случайного характера воспроизводимых событий — поступления запроса на обслуживание и времени обслуживания, точного совпадения результатов разных экспериментов быть не может.

Система основных понятий

Постановка и моделирование задачи массового обслуживания
Система массового обслуживания включает пункты (или каналы) обслуживания, поток заявок на обслуживание и стратегию обслуживания этих заявок
Результатом решения задачи массового обслуживания являются функции распределения некоторых случайных величин, являющихся объектами моделирования, и/или отдельные параметры, характеризующие эти распределения (включая математическое ожидание и дисперсию)
Системы массового обслуживания являются традиционным объектом имитационного моделирования, поскольку аналитические результаты в теории массового обслуживания могут быть получены лишь в простейших случаях

Вопросы и задания

1. Приведите примеры систем, связанных с формированием и обслуживанием очередей.

2. Для решения каких задач предназначена теория массового обслуживания?
3. Какие признаки имитационной модели присутствуют в описанной модели очереди?
4. Запишите на языке электронных таблиц формулы, помещенные в ячейки таблицы, представленной на рис. 3.58.
5. Постройте табличную имитационную модель очереди, в которой будет присутствовать еще один входной параметр: длина очереди, при которой клиент отказывается от обслуживания (как это сделано в учебной программе).

Практикум. Раздел «Моделирование»

3.5.5. Расчет распределения вероятности времени ожидания в очереди

Описанные в предыдущем параграфе вычислительные эксперименты недостаточны для получения *функции распределения времени ожидания* клиентами своей очереди на обслуживание. Для решения такой задачи нужны очень большие выборки. В такой ситуации удобнее воспользоваться программированием.

Реализуем моделирование очереди на компьютере с помощью программы на Паскале. В приведенной ниже программе принята модель равномерного распределения случайных величин $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$: первой — в полуинтервале $[0, P)$, второй — в полуинтервале $[0, Q)$. Величины P и Q следует указать до начала вычислений.

```
Program Ochered;
Uses Crt;
Const n = 1000;
Var i, j: integer; x, P, Q: real;
    A, B, C, D, E, F, G: array [1..n] of real;
    H, L: array [1..11] of real;
begin
  randomize;
  {Указание верхних границ для случайных чисел A и B}
  P:=10; Q:=5;
  {Заполнение первой строки таблицы}
  A[1]:=random*P; B[1]:=random*Q;
  C[1]:=0; D[1]:=0; E[1]:=D[1]+B[1];
  F[1]:=E[1]-C[1]; G[1]:=0;
  {Заполнение оставшихся строк таблицы}
  for i:=2 to n do
  begin
```

```
    A[i]:=random*P; B[i]:=random*Q; C[i]:=C[i-1]+A[i];
    if C[i]>E[i-1] then D[i]:=C[i] else D[i]:=E[i-1];
    E[i]:=D[i]+B[i]; F[i]:=E[i]-C[i]; G[i]:=F[i]-B[i];
  end;
  {Вычисление максимального значения G}
  x:=G[1];
  for i:=2 to n do if G[i]>x then x:=G[i];
  Writeln ('Максимальное значение G равно ', x);
  {Вычисление среднего значения G}
  x:=G[1]; for i:=2 to n do x:=x+G[i]; x:=x/n;
  Writeln ('Среднее значение G равно ', x);
  {Подготовка таблицы диапазонов распределения величины G}
  x:=P; for i:=1 to 11 do L[i]:=(i-1)*x/10;
  {построение распределения величины G по 11 диапазонам}
  for i:=1 to 11 do H[i]:=0;
  for i:=1 to 10 do
    for j:=1 to n do
      if ((G[j]>=L[i])and(G[j]<L[i+1])) then H[i]:=H[i]+1;
  for j:=1 to n do if (G[j]>=P) then H[11]:=H[11]+1;
  {Вычисление распределения относительных частотностей}
  {Величины G}
  For i:=1 To 11 Do H[i]:=H[i]/n;
  {Вывод распределения относительных частотностей величины G}
  for i:=1 to 11 do Writeln('G[',i,']=', H[i]);
  repeat until keypressed
end.
```

При проведении экспериментов с этой программой следует учесть, что чем больше значение n (т. е. объем выборки из всей возможной совокупности случайных событий), тем надежнее результат. Для получения достоверных результатов при имитационном моделировании выборки должны быть достаточно большими. В приведенной программе задано $n = 1000$.

Ниже представлены результаты двукратного выполнения приведенной выше программы — для двух различных выборок случайных событий. Различие между двумя вариантами результатов происходит из-за случайного характера рассматриваемых событий, поэтому точное совпадение здесь маловероятно. Использовались следующие значения параметров функции распределения: $P = 10$, $Q = 5$, т. е. максимальное время между запросами 10 единиц, максимальная продолжительность обработки запроса — 5 единиц.

Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 3.6. Каждый вариант отражен в отдельной строке. В первом столбце приведена относительная частотность того, что значение величины G находится в полуинтервале $[0, P/10)$, во втором — в полуинтервале $[P/10, 2P/10)$ и т. д. В последнем столбце указана относительная частотность того, что значение G в данной выборке больше или равно P. *Относительная частотность* попадания в i-й интервал вычисляется как отношение количества элементов массива G, попавших в этот диапазон, к размеру всей выборки (значению n). Полученные значения нормированы таким образом, что сумма всех чисел в строке равна единице.

Таблица 3.6

Частотности (оценки вероятности) времени ожидания обслуживания

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вар. 1	0,811	0,061	0,044	0,043	0,012	0,008	0,008	0,005	0,002	0,004	0,002
Вар. 2	0,710	0,088	0,070	0,059	0,029	0,013	0,015	0,010	0,004	0,002	0,000

Для первой выборки среднее время ожидания в очереди получилось равным 0,66, для второй — 0,98 в тех же единицах, в которых заданы P и Q.

Обсудим указанные результаты. В различных выборках получились, естественно, различные значения относительных частотностей в одних и тех же диапазонах значений величины G. Надо подчеркнуть, что относительные частотности, найденные в каждой случайной выборке, сами по себе *случайные величины*. Это видно из сравнения результатов двух вариантов расчетов в табл. 3.6. На самом деле нас интересует вероятность того, что величина G находится в том или ином диапазоне, и эта вероятность, при заданных законах распределения величин A и B, *не является случайной величиной*. Теоретически ее можно определить, рассматривая бесконечную выборку, т. е. принять $n = \infty$. Практически же такой вычислительный эксперимент осуществить нельзя. Поэтому *имитационное моделирование на конечной выборке дает лишь оценочные значения распределения вероятностей*. Но чем n больше, тем оценка будет точнее.

Из таблицы 3.6 видно, что наибольшая вероятность ожидания обслуживания приходится на первый временной интервал: от 0 до $P/10$. Для $P = 10$ это означает, что вероятность того, что запрос будет обслужен не позднее, чем через 1 единицу времени после его поступления, составляет примерно от 0,7 до 0,8 (от 70 до 80%).

На рисунке 3.62 изображена диаграмма распределения величины G, построенная по очень большой выборке, охватывающей 10^7 элементарных событий — поступления в очередь запросов

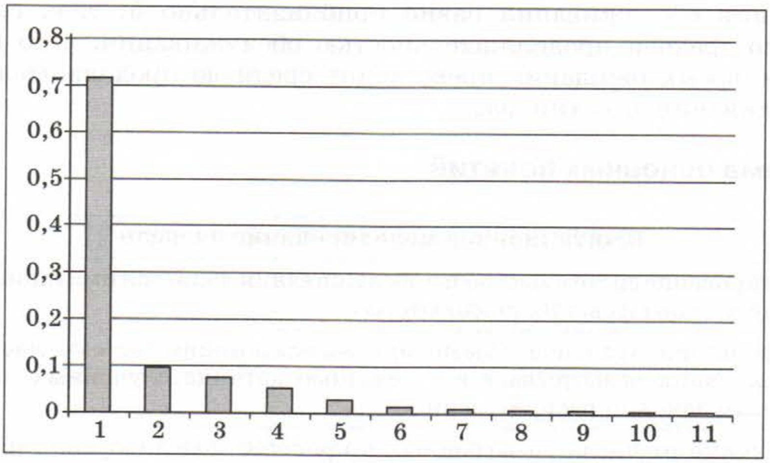
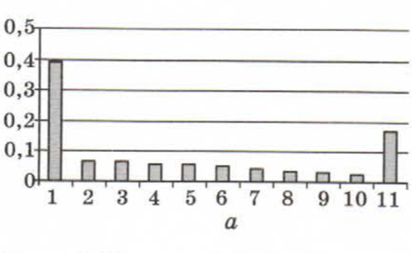


Рис. 3.62. Распределение времени ожидания в очереди при $P = 10$, $Q = 5$

на обслуживание. Из нее следует, что при данном сочетании параметров вероятность долгого ожидания в очереди до начала обслуживания мала. Качественно это похоже на результат, отраженный в табл. 3.6.

Что будет при сближении значений величин P и Q? Ясно, что чем ближе средняя продолжительность обслуживания к средней величине промежутка между приходами в очередь новых клиентов (запросов), тем труднее системе, обслуживающей очередь, справляться с работой. В конце концов, когда Q становится больше или равным P, здравый смысл подсказывает, что в системе должен наступить *кризис очереди*: поток новых запросов станет расти быстрее, чем выполняется их обслуживание. То, что это на самом деле имеет место, подтверждают следующие две диаграммы (рис. 3.63), построенные, соответственно, для случаев $P = 10$, $Q = 8$ и $P = 10$, $Q = 10$. При этом в первом случае среднее время



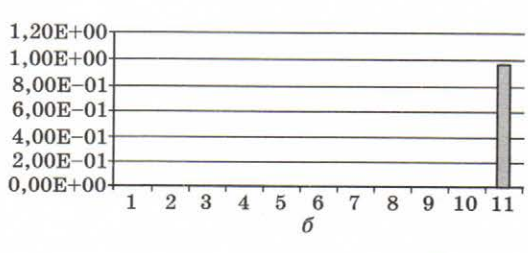


Рис. 3.63. Распределение времени ожидания в очереди при: а) $P = 10$, $Q = 8$; б) $P = 10$; $Q = 10$ (во втором случае все столбики, кроме последнего, в масштабе диаграммы не видны)

ожидания обслуживания равно приблизительно 5, т. е. сопоставимо со средней продолжительностью обслуживания, а во втором среднее время ожидания превосходит среднюю продолжительность обслуживания в сотни раз.

Система основных понятий

Имитационное моделирование очереди
Моделирование систем массового обслуживания является имитационным и требует использования компьютеров
Каждое индивидуальное событие при моделировании системы массового обслуживания разыгрывается с помощью датчика случайных чисел с заданным законом распределения
Независимо от числа разыгранных в процессе моделирования индивидуальных событий, получаемые интегральные характеристики (средние значения и дисперсии) являются случайными величинами, значения которых тем ближе к истинным средним значениям, чем больше объем выборки
В процессе формирования очереди, когда среднее время обслуживания одного участника очереди сравнимо со средним временем между приходами в очередь, наступает кризис очереди, когда она нарастает быстрее, чем рассасывается

Вопросы и задания

1. Сформулируйте задачу об обслуживании клиентов в очереди при наличии привилегированной категории клиентов.
2. В чем заключается кризис очереди?
3. Каким образом можно переделать программу `Ochered` для использования в модели пуассоновского распределения случайных величин?

Практикум. Раздел «Моделирование»

Глава 4
ИНФОРМАЦИОННАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ЧЕЛОВЕКА

4.1. Основы социальной информатики

4.1.1. Информационная деятельность человека в историческом аспекте

В данном разделе мы снова вернемся к вопросу о том, что такое информация. В разделе 1.1 учебника для 10 класса говорилось о том, что для понятия информации нет единственного определения, что это *контекстное понятие*. Сейчас мы будем говорить об информации в новом, социальном контексте.

Человек живет в обществе (социуме) и занимается различными видами деятельности. Одним из таких видов является информационная деятельность человека, которая и будет предметом нашего дальнейшего изучения. Информация в этом контексте будет рассматриваться как *объект информационной деятельности человека*.

В чем заключается информационная деятельность. Человек, по своей природе, наделен разумом, волей, свободой поведения. Человек живет в реальном мире, и для того, чтобы обеспечить свое существование в этом мире, его познает. Познание происходит посредством восприятия человеком сигналов из внешнего мира с помощью своих органов чувств. Эти сигналы — данные из внешнего мира. Эти данные человек в своем сознании преобразует в знакомые ему понятия или вырабатывает новые понятия, расширяющие его ориентацию в окружающем мире.

Информация — воспроизведение реальности в сознании человека. Совокупность понятий, которыми оперирует человек, образуют его систему знаний. Сопоставляя полученную информацию в каждой конкретной ситуации со своими знаниями, человек принимает решение и осуществляет действия. Пополнение знаний человека происходит как от непосредственного контакта с объектами внешнего мира (увидел слона и теперь знаю, как он выглядит), так и через передачу информации в виде условных знаков: текста на естественном языке, рисунка и пр. (прочитал про слона и увидел рисунок — стал знать).

Норберт Винер пишет, что информация есть «обозначение содержания, полученного из внешнего мира в процессе нашего приспособления к нему и приспособления к нему наших чувств»[1]. Благодаря своим творческим наклонностям, развивая их в процессе познания, человек научился не только приспосабливаться к окружающему миру (этой способностью обладают представители растительного и животного мира), но и преобразовывать этот мир в своих интересах.

Таким образом, информационная деятельность людей включает:
- восприятие данных из внешнего мира;
- переработку их в информацию;
- использование информации для принятия решений о своих последующих действиях в быту, на производстве, в социальных отношениях, в том числе действиях, связанных с дальнейшим познанием и преобразованием действительности.

Информационные революции. Огромное влияние на развитие человеческого общества имели и имеют способы формирования, накопления, сохранения, распространения, обмена и передачи знаний (информации). Эти способы со временем развивались. В истории развития средств и методов информационной деятельности выделяются несколько важных событий в информационной области, которые называют даже информационными революциями. Отмечая эти события, можно разделить на этапы историю развития человечества в контексте информационной деятельности.

Первая информационная революция связана с изобретением и распространением письменности (5–6 тыс. лет назад в Месопотамии, через 2 тыс. лет в Китае, позже в Европе). Около 1300 г. до н. э. в Китае появляются первые рукописные книги. Первой рукописной книгой в Греции в VI веке до н. э. стали поэмы Гомера, которые до этого передавались устно. Письменность создала возможность для накопления и распространения знаний, для передачи знаний будущим поколениям. Цивилизации, освоившие письменность, развивались быстрее других, достигали более высокого культурного и экономического уровня. Примерами могут служить древний Египет, страны Междуречья, Китай. Позднее переход от пиктографического и идеографического письма к алфавитному, сделавший письменность более доступной, в значи-

1) Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. С. 55.

тельной степени способствовал смещению центров цивилизации в Европу (Греция, Рим).

Люди, профессионально занимавшиеся в тот период информационной деятельностью, были грамотными людьми, умевшими читать и писать. Грамотность в этот период являлась уделом немногих. К числу таких людей относились жрецы, летописцы, переписчики рукописей. Благодаря письменности возникает наука, требующая фиксации научных знаний и их передачи. Выдающимися учеными античности, оставившими письменные наследия и заложившими начала наук, были Птолемей (астрономия), Теофраст (ботаника), Евклид (геометрия), Аристотель (физика).

Вторая информационная революция была связана с изобретением книгопечатания. В середине XV века немецкий изобретатель Иоганн Гуттенберг создал первый печатный станок. После этого появляются книжные типографии, которые можно назвать первыми в истории техническими средствами информационных технологий. С распространением книгопечатания стало возможным не только сохранять информацию, но и сделать ее массоводоступной. Грамотность становится всеобщим явлением. Всё это ускорило рост науки и техники, помогло промышленной революции. Книги перешагнули границы стран, что способствовало началу создания общечеловеческой цивилизации.

Появление архивов документов, библиотек породило новые профессии информационного направления: архивариуса, библиотекаря, библиографа. Книгоизданием, выпуском газет и журналов стали заниматься писатели, журналисты, редакторы, верстальщики и др.

Третья информационная революция (конец XIX в.) была вызвана изобретением и распространением электрических средств связи. Телеграф, телефон, радио позволили оперативно передавать информацию на любые расстояния. Это были первые технические средства телекоммуникаций. В середине XX века быстро распространяется телевидение. Электрические средства телекоммуникаций значительно повысили эффективность управления внутри государства, интенсифицировали межгосударственные связи, обеспечили оперативное личное общение людей, повысили степень информированности людей о событиях в мире.

В числе новых профессий этого периода: телеграфисты, работники телефонной сети, радио- и тележурналисты, технический персонал радио и телевидения.

Четвертая информационная революция (вторая половина XX в.) связана с появлением микропроцессорной техники и персональных компьютеров. Прелюдией к этим событиям стало изобретение ЭВМ в конце 1940-х годов, но именно появление персональных компьютеров в 1970–1980-х годах сделало использование ЭВМ массовой технологией для работы с информацией.

Информационная деятельность с использованием компьютеров становится содержанием (полным или частичным) значительной части профессий. Одной из самых востребованных профессий на рынке труда становится профессия программиста.

Современный прогресс в информационной сфере происходит во многом под влиянием развития и распространения Интернета — всемирной информационной среды. Интернет оказывает сильное влияние не только на жизнь и деятельность отдельных людей, но и на социальные процессы в обществе в целом. Создание Интернета (1990-е годы) можно рассматривать как начало *пятой информационной революции*, происходящей на наших глазах. Параллельно с этим процессом, во многом на общей технологической базе, развивается феномен мобильной телефонной связи.

Развитие сетевых телекоммуникаций породило множество новых видов информационной деятельности людей: это провайдеры сетевых услуг, web-программисты, сетевые администраторы, web-дизайнеры, специалисты по защите информации и др.

Возвращаясь к понятию информации и к сопоставлению этого понятия со знаниями людей (человеческого общества), всё множество профессий, связанных с информационной деятельностью людей, можно разделить на три группы.

1. Профессии, связанные с *производством знаний*: ученый, конструктор, изобретатель, писатель, законодатель и пр.
2. Профессии, связанные с *сопровождением знаний* (хранением, передачей и распространением, систематизацией, защитой): работник библиотеки или архива (бумажных и цифровых), преподаватель, работник СМИ, издатель, специалист в области информационных технологий.
3. Профессии, связанные с *использованием знаний*: специалисты всех видов наукоемких производств, бизнеса, управления, безопасности, обороны и пр.

Система основных понятий

Информационная деятельность человека в историческом аспекте
Информационная деятельность человека складывается из: • восприятия сигналов из внешнего мира и переработки их в информацию; • встраивания полученной информации в систему знаний; • использования знаний с целью ориентации в мире, приспособления к нему и преобразования действительности в своих интересах

Информационная революция — кардинальные изменения в области информационной деятельности людей вследствие новых открытий и изобретений
Пять информационных революций связаны с изобретениями: 1) письменности; 2) книгопечатания; 3) электрических средств связи; 4) микропроцессора и ПК; 5) Интернета, мобильной телефонии
Три группы профессий в информационной области направлены на: 1) производство новых знаний (информации); 2) сопровождение информации; 3) использование информации

Вопросы и задания

1. Обоснуйте, почему информационная деятельность жизненно необходима человеку.
2. Попробуйте сопоставить информационную деятельность человека с информационными функциями представителей животного мира.
3. Какие события в истории человечества называют информационными революциями? К каким последствиям они привели?
4. Какие инструменты профессиональной информационной деятельности людей возникали на разных этапах истории?
5. Назовите современные профессии, связанные с информационной деятельностью. Определите для каждой из них виды информации, с которой они работают, и средства информационной деятельности.

4.1.2. Информационное общество

В своей истории человеческое общество прошло несколько этапов, связанных с уровнем развития производства:

- аграрное общество (возникло приблизительно 10 тысяч лет назад с появлением сельского хозяйства);
- индустриальное общество (начало возникновения — приблизительно три века назад с появлением механизированного промышленного производства);
- постиндустриальное общество — современная стадия общественной эволюции в развитых странах.

Ученые-обществоведы определяют информационное общество как складывающуюся в настоящее время форму постиндустриального этапа общественного развития.

Признаки информационного общества

Название «информационное общество» впервые возникло в Японии. Специалисты, предложившие этот термин, разъяснили, что он определяет общество, в котором в изобилии циркулирует высокая по качеству информация, а также есть все необходимые средства для ее хранения, распределения и использования. Информация легко и быстро распространяется по требованиям заинтересованных людей и организаций и выдается им в привычной для них форме. Стоимость пользования информационными услугами настолько невысока, что они доступны каждому.

Академик В. А. Извозчиков предлагает следующее определение: «Будем понимать под термином «информационное (компьютеризированное) общество» то общество, во все сферы жизни и деятельности членов которого включены компьютер, телематика, другие средства информатики в качестве орудий интеллектуального труда, открывающих широкий доступ к сокровищам библиотек, позволяющих с огромной скоростью производить вычисления и перерабатывать любую информацию, моделировать реальные и прогнозируемые события, процессы, явления, управлять производством, автоматизировать обучение и т. д.» (под «телематикой» здесь понимается обработка информации на расстоянии).

Не существует общепринятого критерия оценки полномасштабного информационного общества, однако известны попытки его формулировки. Интересный критерий предложил академик А. П. Ершов: *о фазах продвижения к информационному обществу следует судить по совокупным пропускным способностям каналов связи.* За этим стоит простая мысль: развитие каналов связи отражает и уровень компьютеризации, и объективную потребность общества во всех видах информационного обмена, и другие проявления информатизации. Согласно этому критерию, ранняя фаза информатизации общества наступает при достижении действующей в нем совокупной пропускной способности каналов связи, обеспечивающей развертывание достаточно надежной междугородной телефонной сети. Завершающая фаза — при возможности реализации надежного и оперативного информационного контакта между членами общества по принципу «каждый с каждым». На завершающей фазе пропускная способность каналов связи должна быть в миллион раз больше, чем в первой фазе.

Согласно мнению ряда специалистов, США завершат в целом переход к информационному обществу к 2020 году, Япония и большинство стран Западной Европы — к 2030–2040 годам.

Вхождение России в информационное общество имеет свои особенности, связанные с современным этапом ее развития. В России имеется ряд объективных предпосылок к переходу в состояние информационного общества. Среди них: быстрое развитие материальной базы информационной сферы, информатизация многих отраслей производства и управления, активное вхождение в мировое сообщество, подготовленность общественного сознания и др.

Важно, что движение России к информационному обществу реализуется государством как стратегическая, приоритетная цель, достижению которой способствует достаточно высокий кадровый и научно-технический потенциал России.

Переход к информационному обществу происходит через процесс информатизации всех сторон общественной и личной жизни населения страны. Следует понимать, что информатизация не является самоцелью. Цель всякого научно-технического прогресса состоит в улучшении жизни людей.

Информатизация заключается в развитии и распространении информационных средств и технологий с целью достижения такого уровня информированности всего населения, которое приведет к кардинальному улучшению условий труда и жизни каждого человека.

Тенденции развития информационного общества

Изменение структуры экономики и структуры труда. Вторая половина XX века, благодаря информатизации, сопровождалась перетоком людей из сферы прямого материального производства в информационную сферу. Промышленные рабочие, составлявшие в середине XX века более 2/3 населения, сегодня в развитых странах составляют менее 1/3. Значительно разросся социальный слой, который называют «белыми воротничками», — это люди наемного труда, не производящие непосредственно материальных ценностей, а занятые обработкой информации (в широком смысле): учителя, банковские служащие, программисты и т. д.

Информатизация изменила и характер труда в традиционных отраслях промышленности. Появление робототехнических систем, повсеместное внедрение элементов микропроцессорной техники является основной причиной этого явления. Приведем показательный пример: в станкостроительной отрасли в США в 1990 году было занято 330 тысяч человек, а к 2005 году осталось 14 тысяч человек. Это произошло за счет массового сокращения людей на сборочных линиях вследствие внедрения на их рабочих местах роботов и манипуляторов.

С расширением информационной области профессиональной деятельности людей, с развитием рынка информационных продуктов и услуг требуется все большее число квалифицированных специалистов. Подробнее об этом будет рассказано в разделе «О профессиях» в конце этой главы.

Развитие и массовое использование информационных и коммуникационных технологий. В основе информационной революции лежит взрывное развитие *информационных* и *коммуникационных технологий*. В этом процессе отчетливо наблюдается и обратная связь: движение к информационному обществу резко ускоряет процессы развития указанных технологий, делая их широко востребованными.

Однако сам по себе бурный рост производства средств вычислительной техники, начавшийся с середины XX века, не стал причиной перехода к информационному обществу. Компьютеры использовались сравнительно небольшим числом специалистов до тех пор, пока существовали обособленно. Важнейшим этапом на пути в информационное общество стало:

- создание телекоммуникационной инфраструктуры, включающей в себя сети передачи данных;
- появление огромных баз данных, доступ к которым через сети получили миллионы людей;
- выработки единых правил поведения в сетях и поиска в них информации.

Огромную роль в обсуждаемом процессе сыграло создание международного сетевого сообщества Интернет. Сегодня Интернет представляет собой колоссальную и быстро растущую систему, число пользователей которой в настоящее время превышает 2 млрд человек. Мировая статистика по странам-лидерам пользователей Интернета представлена в табл. 4.1, по данным Internet World Stats[1]. Приведенные данные соответствуют концу 2012 года.

Список отсортирован по убыванию доли пользователей Интернета в мире. Необходимо отметить, что количественные характеристики Интернета устаревают быстрее, чем публикуются отчеты, в которых эти показатели приводятся. Скорость роста числа пользователей сети достаточно устойчиво составляет порядка 20% в год.

Россия занимает 7-е место в рейтинге самых интернетизированных стран, что является большим прогрессом по сравнению с ситуацией 5–10-летней давности. По некоторым показателям, связанным с Интернетом, наша страна находится в лидерах. Так, по числу пользователей оптоволоконными сетями Россия стоит на первом месте в Европе. Это объясняется тем, что при относительно позднем начале массовой «интернетизации» российским провайдерам было проще развивать новые и технологически более совершенные каналы доступа к Сети, чем модернизировать существующие.

Преодоление информационного кризиса. Информационный кризис — явление, которое стало заметным еще в начале XX века. Оно проявляется в том, что поток информации, который хлынул на человека, столь велик, что оказывается недоступным для обработки в приемлемое время.

1) http://www.internetworldstats.com/top20.htm

Таблица 4.1

Статистика по числу пользователей Интернета

№	Страна	Число пользователей Интернета (млн чел.)	Население (млн чел.)	Процент от населения страны	Процент от числа пользователей в мире
	Весь мир	2,405,518	7,018,000	34,3%	100%
1	Китай	538,000	1,343,000	40,1%	22,4%
2	США	245,203	313,842	78,1%	10,2%
3	Индия	137,000	1,205,074	11,4%	5,7%
4	Япония	101,229	127,368	79,5%	4,2%
5	Бразилия	88,495	193,947	45,6%	3,7%
6	Россия	67,983	142,512	47,7%	2,8%
7	Германия	67,484	81,306	83,8%	3,0%
8	Великобритания	52,731	63,047	83,6%	2,2%
9	Франция	52,229	65,630	79,6%	2,2%
10	Нигерия	48,366	170,124	28,4%	2,0%
11	Мексика	42,000	114,975	36,5%	1,7%
12	Иран	42,000	78,869	53,3%	1,7%
13	Южная Корея	40,330	48,860	82,5%	1,7%
14	Турция	36,455	79,749	45,7%	1,5%
15	Италия	35,800	61,261	58,4%	1.5%

Это явление имеет место и в научных исследованиях, и в технических разработках, и в общественно-политической жизни. В нашем усложняющемся мире принятие решений становится все более ответственным делом, а оно невозможно без полноты информации.

Ускорение накопления общего объема знаний происходит с удивительной быстротой. В начале XX века общий объем всей производимой человечеством информации удваивался каждые 50 лет, к 1950 г. удвоение происходило каждые 10 лет, к началу XXI века — уже каждые 5 лет, и это, судя по всему, не предел.

Приведем несколько примеров проявлений информационного кризиса. Число научных публикаций по большинству отраслей знания столь велико, а традиционный доступ к ним (чтение журналов) столь затруднен, что специалисты не могут успевать в них ориентироваться, что порождает дублирование работ и иные неприятные последствия.

Часто оказывается проще заново сконструировать некоторое техническое устройство, чем найти документацию о нем в бесчисленных описаниях и патентах.

Политический руководитель, принимающий на высоком уровне ответственное решение, но не владеющий полнотой информации, легко попадет впросак, а последствия могут быть катастрофическими. Разумеется, одной информации в таком деле мало, нужны и адекватные методы политического анализа, но без информации они бесполезны.

В результате наступает **информационный кризис**, проявляющийся в следующем:

- информационный поток превосходит ограниченные возможности человека по восприятию и переработке информации;
- возникает большое количество избыточной информации (так называемый «информационный шум»), которая затрудняет восприятие полезной для потребителя информации;
- укрепляются экономические, политические и другие барьеры, которые препятствуют распространению информации (например, по причине секретности).

Частичный выход из информационного кризиса видится в применении новых информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Внедрение современных средств и методов хранения, обработки и передачи информации многократно снижает барьер доступа к ней и скорость поиска. Разумеется, одни лишь технологии не могут решить проблему, имеющую и экономический характер (информация стоит денег), и юридический (информация имеет собственника), и ряд других. Эта проблема комплексная и решается усилиями как каждой страны, так и мирового сообщества в целом.

Свобода доступа к информации и свобода ее распространения. Обсуждаемая проблема лежит больше в политической и экономической плоскости, нежели в технической, поскольку современные информационные технологии чисто технически открыли безграничный простор для информационных обменов. *Без свободы доступа к информации информационное общество невозможно.* Свобода доступа к информации и свобода ее распространения — обязательное условие демократического развития, способствующее экономическому росту, добросовестной конкуренции на рынке. Лишь опираясь на полную и достоверную информацию, можно принимать правильные и взвешенные решения в политике, экономике, науке, практической деятельности.

Огромное значение имеет свобода распространения информации культурно-просветительного характера. Она способствует росту культурного и образовательного уровня общества.

Вместе с тем проблема свободы доступа к информации имеет и противоположную сторону. Далеко не всякая информация государственной, корпоративной или личной значимости должна свободно распространяться. Каждый человек имеет право на личные тайны; точно так же государство и корпорации имеют секреты, жизненно важные для их существования. Не должно быть свободы для распространения информации, пропагандирующей насилие и иные, неприемлемые для общества и личности, явления. Поиск компромисса между свободой доступа к информации и неизбежными ограничениями является непростой задачей.

Рост информационной культуры. Современное понимание информационной культуры заключается *в умении и потребности человека работать с информацией средствами новых информационных технологий*.

Целенаправленные усилия общества и государства по развитию информационной культуры населения являются обязательными при продвижении по пути к информационному обществу. Одной из важных задач курса информатики является выработка элементов информационной культуры учащихся. Указанная задача носит комплексный характер, она не может быть решена только школой. Выработка элементов информационной культуры должна начинаться в детстве, в семье, и проходить затем через всю сознательную жизнь человека, через всю систему образования и воспитания.

Информационная культура включает в себя гораздо больше, чем простой набор навыков технической обработки информации с помощью компьютера и телекоммуникационных средств. Информационная культура должна стать частью общечеловеческой культуры. Культурный (в широком смысле) человек должен уметь оценивать качество получаемой информации, понимать ее полезность, достоверность, по этим признакам осуществлять отбор информации.

Существенный элемент информационной культуры — владение методикой коллективного принятия решений. Умение взаимодействовать в информационном поле с другими людьми — важный признак человека информационного общества.

Изменение уклада жизни людей. Формирование информационного общества существенно отражается на повседневной жизни людей. По уже имеющимся примерам можно предвидеть, что изменения будут глубокими. Так, массовое внедрение телевидения в 60–70 годах XX века существенно изменило быт людей, причем не только в лучшую сторону. С одной стороны, у миллионов людей появилась возможность доступа к сокровищам национальной и мировой культуры, с другой — сократилось живое общение, стало больше стереотипов, насаждаемых телевидением, сузился круг чтения.

Рассмотрим отдельные составляющие уклада жизни, анализируя то, что уже состоялось, и то, что нарождается в наше время.

Работа. По данным социологического исследования, проведенного в США, уже сейчас до 10% работающих могут выполнять свою работу, не выходя из дома, а 1/3 всех недавно зарегистрированных фирм основана на широком использовании самостоятельной занятости, не связанной с регулярным приходом в офис.

Досуговая деятельность меняется на наших глазах. Компьютерные игры, уже занимающие у части людей заметное время, трансформируются в сетевые игры с участием нескольких удаленных партнеров. Растет время, затрачиваемое на «хождение» по Интернету без определенной цели, «чат» с не очень осмысленным обменом сообщениями. Вместе с тем реализуются и познавательные путешествия по образовательным сайтам, виртуальным музеям и т. д. Как уже говорилось, информационная культура — лишь часть культуры общечеловеческой, и форма проведения досуга определяется, в первую очередь, общей культурой конкретного человека.

Недавнее достижение интернет-технологий — *поход за покупками* реальных товаров в виртуальный интернет-магазин — уже начинает заметно сказываться на системе торговли.

Жилище человека имеет тенденцию к все большей «информатизации». Уже сдаются в эксплуатацию дома, в которые вместо жгута проводов (электропроводка, телефон, телевидение, охранная и пожарная сигнализации и т. д.) входит лишь один силовой кабель и один информационный кабель. Последний берет на себя все информационные связи, включая обеспечение многих каналов кабельного телевидения, выход в Интернет и т. д. Специальный электронный блок в такой квартире будет контролировать все устройства, включая бытовую технику и системы жизнеобеспечения, помогать обитателю квартиры жить максимально комфортно. Подобное здание называется «умным домом».

Поскольку для многих людей автомобиль стал продолжением среды обитания, появление «*умных автомобилей*» также важно. Кроме наличия в таком автомобиле уже ставших обязательными микропроцессорных устройств, обслуживающих его техническую часть, реализована постоянная связь с городскими информационными службами, подсказывающими оптимальный на настоящий момент маршрут (с учетом занятости трасс). Кроме того, этот автомобиль связан с «умным домом» своего хозяина и из него можно этим домом управлять.

Опасности информационного общества. Восхищаясь возможностями, которые несет информационное общество, не следует забывать о тех противоречиях, которые оно потенциально содержит и которые уже, по мере продвижения к нему, проявляются.

Следует понимать, что понятие «информационное общество» не лежит в круге понятий, которые связаны с понятиями «капитализм», «социализм» и пр., т. е. не указывает напрямую на характер отношений собственности и экономический уклад. Точно так же его не следует воспринимать как очередную утопию, сулящую всеобщее счастье.

Перечислим некоторые опасности и проблемы на пути к информационному обществу:

- реальная возможность разрушения посредством информационных технологий частной жизни людей и организаций;
- опасность все большего влияния на общество средств массовой информации, и тех, кто эти средства контролирует;
- проблема отбора качественной и достоверной информации при большом ее объеме;
- проблема адаптации многих людей к среде информационного общества, к необходимости постоянно повышать свой профессиональный уровень;
- столкновение с виртуальной реальностью, в которой трудно различимы иллюзия и действительность, создает у некоторых людей, особенно молодых, малоизученные, но явно неблагоприятные психологические проблемы;
- переход к информационному обществу не сулит каких-либо перемен в социальных благах и сохраняет социальное расслоение людей; более того, к существующим видам неравенства может добавиться информационное неравенство и тем самым усилить социальную напряженность;
- сокращение числа рабочих мест в экономике развитых стран, не компенсируемое полностью созданием новых рабочих мест в информационной сфере, ведет к опасному социальному недугу — массовой безработице.

Крайним проявлением негативных последствий перехода к информационному обществу являются так называемые *информационные войны*. Этот термин трактуется как открытое или скрытое информационное воздействие государственных систем друг на друга с целью получения определенного выигрыша в политической или материальной сфере. Основными объектами поражения в таких войнах будут информационные инфраструктуры и психология противника.

Под информационной войной понимается комплексное воздействие на систему государственного и военного управления противостоящей стороны, на ее военно-политическое руководство. В принципе, это воздействие должно еще в мирное время приводить к принятию благоприятных решений для стороны — инициатора информационного давления, а в ходе конфликта полностью парализовать функционирование инфраструктуры управления противника. Информационное противоборство, предшествующее информационной войне, реализуется путем воздействия на информацию и информационные системы противника с одновременным укреплением и защитой собственной информации и информационных систем и инфраструктуры. На определенном этапе информационная война может перейти в обычную, с применением традиционных видов оружия, для подавления ослабленного противника. К сожалению, примеры состоявшихся информационных войн уже есть.

Система основных понятий

Информационное общество
Информационное общество: современная форма постиндустриального этапа общественного развития
Информационный кризис общества: ситуация, при которой поток информации возрос до такой степени, что для каждого отдельного человека он оказался недоступным для обработки в приемлемое время
Меры преодоления информационного кризиса: повсеместное использование ИКТ, а также экономические и юридические рычаги управления информационной деятельностью
Информационная культура: умение и потребность человека работать с информацией средствами новых информационных технологий, а также умение отбирать информацию и оценивать ее полезность
Признаки развитого информационного общества: обеспечение быстрой связи «каждый с каждым»; работа большинства людей связана с обработкой информации; широкая автоматизация производства на базе микропроцессорной техники; массовое использование Интернета; свобода доступа к информации; влияние информатизации на весь уклад жизни людей
Проблемы информационного общества: нарушение конфиденциальности личной информации; распространение недостоверной информации; психологические проблемы ухода в виртуальную реальность; возникновение информационного неравенства; рост безработицы; информационные войны

Вопросы и задания

1. Что такое информационное общество?
2. Сформулируйте критерий, определяющий стадии информационного общества (по А. П. Ершову).

3. К каким изменениям в экономике государства и на рынке труда приводит формирование информационного общества?
4. Каково настоящее состояние и перспективы информационных и коммуникационных технологий?
5. В чем заключается информационный кризис общества? Каковы пути его преодоления?
6. Определите связь между понятиями «информационное общество» и «свобода доступа к информации».
7. Что такое информационная культура?
8. Как соотносится информационная культура с общечеловеческой культурой?
9. Определите изменения, которые произойдут в укладе жизни членов информационного общества: в работе, в учебе, в быту.
10. Какие наиболее существенные проблемы и опасности существуют на пути к информационному обществу?
11. Что такое информационное войны?
12. Попробуйте привести конкретные исторические примеры ведения информационных войн.
13. Почему задача движения к информационному обществу для России относится к числу приоритетных?
14. Приведите известные вам примеры, с которыми вы сталкивались, отражающие наличие процесса движения России к информационному обществу.

4.1.3. Информационные ресурсы общества

Что такое информационные ресурсы

Ресурс — это запас или источник некоторых средств. Всякое общество, государство, фирма или частное лицо имеет определенные ресурсы, необходимые для его жизнедеятельности.

Традиционными видами общественных ресурсов являются материальные (в том числе природные), энергетические, трудовые, финансовые ресурсы. Со сменой этапов развития производства, о которых говорилось в предыдущем параграфе, на передний план выдвигаются новые виды общественных ресурсов. Для аграрного общества основными ресурсами были плодородные земли, пастбища, рыбные ресурсы водоемов, пресная вода для орошения. В индустриальном обществе возросла роль минеральных и энергетических ресурсов.

Переход к информационной стадии постиндустриального общества выдвигает в лидеры *общественные информационные ресурсы*. Возрастающая значимость информационных ресурсов проявляется в том, что *они становятся товаром, совокупная стоимость* *которого на рынке сопоставима со стоимостью традиционных ресурсов.*

Существуют разные подходы к определению понятия «информационные ресурсы».

Юридическая формула, принятая в Федеральном законе РФ «Об информации, информатизации и защите информации», гласит:

«Информационные ресурсы — отдельные документы и отдельные массивы документов, документы и массивы документов в информационных системах (библиотеках, архивах, фондах, банках данных, других информационных системах)».

Это определение дает юридическое основание для решения проблемы охраны информационных ресурсов.

Вместе с тем, как и многие юридические формулы, данное определение сильно сужает понятие, которое большинством людей воспринимается гораздо шире. Здесь нет противоречия, просто не всё в жизни можно измерить точными формулами. На самом деле, при более широком подходе, к информационным ресурсам уместно относить все научно-технические знания, произведения литературы и искусства, множество иной информации общественно-государственной значимости, зафиксированной в любой форме, на любом носителе информации, включая, разумеется, и те, о которых сказано в законе.

Информационные ресурсы общества в настоящее время рассматриваются как стратегические ресурсы, аналогичные по значимости материальным, сырьевым, энергетическим, трудовым и финансовым ресурсам. Однако между информационными ресурсами и всякими иными существует одно важнейшее различие:

всякий ресурс, кроме информационного, после использования исчезает

(сожженное топливо, израсходованные финансы и т. п.), а информационный ресурс остается неуничтожаемым, им можно пользоваться многократно, он копируется без ограничений.

Национальные информационные ресурсы

Любая классификация информационных ресурсов общества оказывается неполной. В основу классификации можно положить:

- отраслевой принцип (по виду науки, промышленности, социальной сферы и т. п., к чему относится информация);
- форму представления (по виду носителей, степени формализованности, наличию дополнительного описания и пр.).

Внутри каждого класса можно проводить дополнительное, более детальное разделение. Например, ресурсы Интернета можно разделять по их назначению и по формам представления: сервисная информация, библиографическая информация, материалы телеконференций, программное обеспечение, видео и т. д.

Один из способов классификации национальных информационных ресурсов представлен на рис. 4.1. Прокомментируем его.

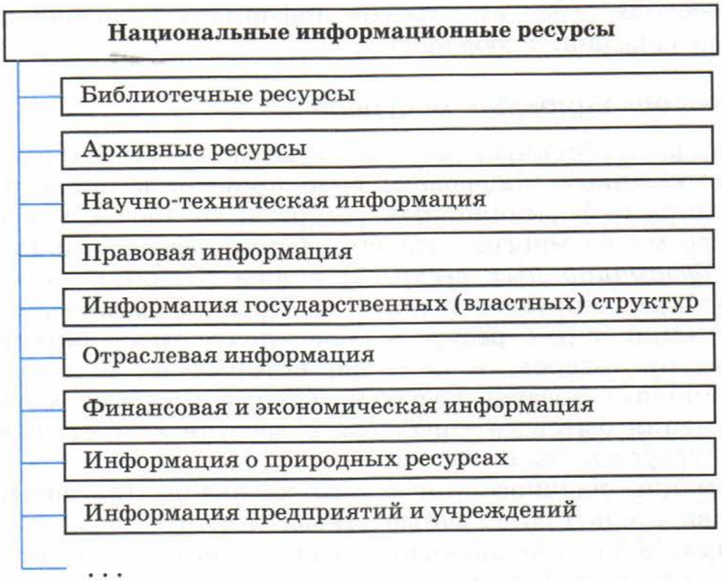


Рис. 4.1. Состав национальных информационных ресурсов

Огромные информационные ресурсы скрыты в **библиотеках.** Доминируют традиционные (бумажные) формы их представления, но всё больше библиотечных ресурсов в последние годы переводится на цифровую (безбумажную) основу.

Архивы скрывают (иногда многовековые) материалы, связанные с историей и культурой страны. Объемы архивных материалов огромны и накапливаются зачастую быстрее, чем их удается обрабатывать.

Во всех развитых странах существуют специализированные **системы научно-технической информации.** Они включают многочисленные специальные издания, патентные службы и т. д. Информация такого рода часто является дорогостоящим товаром.

Своды законов, кодексы, нормативные акты, другие виды **правовой информации** — без этого не может жить ни одно государство.

Свои **отраслевые информационные ресурсы** имеются у любой социальной, промышленной, аграрной и иной сферы общества.

Огромны информационные ресурсы оборонной сферы, системы образования и т. д.

Не будем комментировать далее, тем более что рис. 4.1 не охватывает всех видов национальных информационных ресурсов. Отметим лишь, что само это понятие сформировалось не так давно, примерно четверть века назад, в ответ на растущую зависимость развитых стран от объемов информации, уровня развития средств ее передачи и обработки.

Рынок информационных ресурсов

Обилие информационных ресурсов и возможность их представления в современном (цифровом) виде привели к появлению развитого рынка информационных ресурсов: товаров и услуг. В настоящее время во многих странах сформировался *национальный рынок информационных ресурсов*; видны и явные признаки соответствующего мирового рынка. Этот рынок во многом подобен рынку традиционных ресурсов, поскольку имеет определенную номенклатуру товаров, в качестве которых на нем выступают информационные товары и услуги. Такими товарами могут быть:

- информация бытового характера о доступе к «обычным» товарам и услугам, их стоимости;
- информация научно-технического характера (патенты, авторские свидетельства, научные статьи и т. д.);
- информационные технологии, компьютерные программы;
- базы данных, информационные системы и многое другое.

Как и на всяком рынке, на рынке информационных товаров и услуг есть поставщики (продавцы) и потребители (покупатели). Поставщики, как правило, — это производители информации или ее собственники. Ими бывают:

- центры, в которых создаются и хранятся базы данных;
- службы связи и телекоммуникации;
- бытовые службы;
- специализированные коммерческие фирмы, занимающиеся куплей-продажей информации (например, рекламные агентства);
- неспециализированные фирмы, выпускающие «обычные» товары и в качестве дополнительной продукции — информацию о них;
- консалтинговые (консультационные) фирмы;
- биржи;
- частные лица и пр.

Потребители информации — это мы все, частные лица, а также предприятия, которые сегодня без информации остались бы столь же недееспособными, как и без поставки сырья; органы власти всех уровней и т. д.

Информационные услуги — особый вид товара на информационном рынке. Примером информационной услуги является выполняемый многими библиотеками подбор литературы по тематике заказчика. Причем кроме той литературы, которая есть в библиотеке, работники библиотеки могут выполнить и более широкий поиск, чтобы дать клиенту исчерпывающие сведения. Информационные услуги возможны при наличии баз данных по соответствующей проблематике (в компьютерном или некомпьютерном варианте).

Информационные услуги оказывают отнюдь не только библиотеки. Во многих странах мира (в том числе и в России) существуют специальные институты, которые обрабатывают информацию по многим областям знаний и готовят по ней обзоры, рефераты, краткую информацию для специалистов. Без таких услуг деятельность ученых и специалистов трудно себе представить.

В сфере бизнеса информационные услуги включают предоставление определенной деловой информации, консультации по определенной тематике и т. д. В сфере коммуникаций информационные услуги оказывают операторы связи, провайдеры Интернета (т. е. организации, осуществляющие за плату доступ и обслуживание пользователей). Некоторые формы услуг по обучению и повышению квалификации также вполне можно рассматривать как информационные услуги (например, обучение на расстоянии с использованием телекоммуникационной сети).

Уровень развития сферы информационных услуг во многом определяет степень приближенности к *информационному обществу*.

Рынок информационных товаров и услуг в своем развитии прошел несколько стадий. Его активное формирование совпало во времени с появлением первых ЭВМ, т. е. с началом 50-х годов XX века. Это совпадение явилось, в значительной мере, случайным, так как первые ЭВМ еще не создавали информационной инфраструктуры. В то время бурный расцвет науки и техники привел к созданию первых профессиональных информационных служб для этих областей, и соответствующий рынок был ориентирован на узкий слой ученых и специалистов.

По-настоящему рынок информационных товаров и услуг расцвел после широкого внедрения микрокомпьютеров и основанных на их использовании телекоммуникационных систем. Кроме того, решающее значение для формирования рынка имело создание баз данных по множеству направлений знаний и человеческой деятельности. Этот процесс принял массовый характер в 1980-х годах. К этому времени появились первые признаки глобализации данного рынка, начался международный обмен на нем товарами и услугами. Ведущими странами на рынке информационных товаров и услуг в настоящее время являются США, Япония и ряд стран Западной Европы.

В России в настоящее время имеется вполне сформировавшийся информационный рынок (хотя по объему предлагаемых услуг он пока уступает аналогичным рынкам экономически высокоразвитых стран). Важнейшими компонентами отечественного рынка информационных услуг являются данные об информационном оборудовании, компьютерах, компьютерных сетях и соответствующих технологиях. Немалую часть предлагаемых товаров составляют справочные системы разного назначения. Существуют специальные службы обработки информации по заказу клиентов, службы продажи билетов и т. д. Немало на этом рынке и финансовой, статистической информации, информации по образовательным услугам, по организации досуга и многих иных товаров и услуг.

Постепенно в российском обществе начинает формироваться понимание простой истины: *если информация — товар, то за нее надо платить*. В противном случае разрушается сама основа рынка. Например, рынок программного обеспечения в нашей стране мог бы быть гораздо более развитым, если бы не происходило массового «пиратского» копирования программ. По мере совершенствования социально-экономических отношений, законодательства, подобная практика постепенно уходит в прошлое, хотя немало проблем в этой сфере остается.

Система основных понятий

Информационные ресурсы общества
Ресурс — запас или источник некоторых средств. «Традиционные» ресурсы: материальные, сырьевые, энергетические, трудовые, финансовые, природные и пр.
Информационные ресурсы (ИР) — это хранилища и источники общественно-значимой информации. ИР — товар, стоимость которого сопоставима со стоимостью традиционных ресурсов. ИР не исчезают в результате их использования, а накапливаются и изменяются
Рынок информационных ресурсов предоставляет потребителю множество информационных товаров и услуг, реализуемых посредством ИКТ (в электронной форме)
Примеры **информационных товаров:** патенты на изобретения, научно-техническая информация, компьютерные программы и технологии, базы данных, информационные системы
Примеры **информационных услуг:** подбор информации на заданную тему, консультации, услуги мобильной связи и Интернета, дистанционное образование и пр.

Мировой рынок информационных ресурсов формируется путем объединения национальных рынков на базе Интернета
Развитие информационного рынка возможно только на основе товарно-денежных отношений: **информация — это товар, за который надо платить**

Вопросы и задания

1. Что обозначает термин «ресурсы»? Какие бывают ресурсы?
2. Что такое информационные ресурсы?
3. Каким особым свойством обладают информационные ресурсы по сравнению с любыми другими?
4. Почему информационные ресурсы можно назвать товаром?
5. Почему информационные ресурсы относят к числу стратегических?
6. Что представляет собой рынок информационных ресурсов?
7. Кто на рынке информационных ресурсов выступает в роли продавца, а кто — покупателя?
8. Могли бы вы предложить на рынок информационных ресурсов какой-нибудь свой товар? Как бы вы его оценили?
9. Что относится к числу информационных услуг?
10. Придумайте новый вид информационных услуг.
11. Что является основой мирового рынка информационных товаров и услуг? Какие виды информационных услуг вы знаете? Пользовались ли вы ими лично?
12. Охарактеризуйте виды информационных ресурсов России.
13. С какими видами информационных ресурсов России вы лично сталкивались?

4.1.4. Информационное право и информационная безопасность

Основы информационного права

Уже на раннем этапе продвижения к информационному обществу необходимы меры правового регулирования вновь возникающих отношений. Каждая страна идет в этом направлении своим путем. Юридические вопросы, возникающие в информационной сфере, столь сложны и запутанны, что гармоничного законодательства, решающего все соответствующие проблемы, нет ни в одной стране мира.

Коротко опишем некоторые законы, действующие в этой сфере в Российской Федерации.

Гражданский кодекс РФ, часть 4, глава 70 «Авторское право». Статья 1261 «Программы для ЭВМ». «Авторские права на все виды программ для ЭВМ (в том числе на операционные системы и программные комплексы), которые могут быть выражены на любом языке и в любой форме, включая исходный текст и объектный код, охраняются так же, как авторские права на произведения литературы». Однако имущественные права на программные продукты, созданные авторами в порядке выполнения служебных обязанностей или по заданию работодателя, принадлежат работодателю. Имущественные права, в отличие от авторских, могут быть переданы иному физическому или юридическому лицу на договорной основе — через приобретение лицензии на программу.

Для современного состояния нашего общества именно вопросы, связанные с нарушением авторских и имущественных прав, являются наиболее актуальными. Значительная часть программного обеспечения, использующегося отдельными пользователями и даже организациями, получена путем незаконного копирования. Эта практика мешает становлению цивилизованного рынка компьютерных программных средств и информационных ресурсов.

Данный вопрос стал для нашей страны особенно актуальным в процессе вступления России в международные организации и союзы, например во Всемирную торговую организацию. Несоблюдение прав в сфере собственности на компьютерное программное обеспечение стало объектом уголовного преследования на практике.

Федеральный закон № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» регулирует отношения, возникающие при: осуществлении права на поиск, получение, передачу и производство информации; применении информационных технологий; обеспечении защиты информации.

В частности, в статье 8 «Право на доступ к информации» утверждается право гражданина на получение из официальных источников информации о деятельности государственных органов, об использовании бюджетных средств, о состоянии окружающей среды и пр., а также любой информации, непосредственно затрагивающей его права и свободы. Ограничение доступа к информации устанавливается только федеральными законами, направленными на обеспечение государственной безопасности.

В статье 12 «Государственное регулирование в сфере применения информационных технологий», в частности, отмечается, что обязанностью государства является создание условий для эффективного использования в Российской Федерации информационно-телекоммуникационных сетей, в том числе Интернета.

Особое внимание обратим на статью 3 «Принципы правового регулирования отношений в сфере информации, информационных технологий и защиты информации», в которой среди принципов правового регулирования в информационной сфере провозглашается принцип неприкосновенности частной жизни, недопустимость сбора, хранения использования и распространения информации о частной жизни лица без его согласия.

В 2006 году вступил в силу **Федеральный закон № 152-ФЗ «О персональных данных»**, целью которого является обеспечение защиты прав и свобод человека и гражданина при обработке его персональных данных (с использованием средств автоматизации или без использования таковых), в том числе защиты прав на неприкосновенность частной жизни, личную и семейную тайну.

В 1996 году в **Уголовный кодекс** был впервые внесен раздел «Преступления в сфере компьютерной информации». Он определил меру наказания за некоторые виды преступлений, ставших, к сожалению, распространенными:

- неправомерный доступ к компьютерной информации;
- создание, использование и распространение вредоносных программ для ЭВМ;
- умышленное нарушение правил эксплуатации ЭВМ и их сетей.

Отметим, что правовое регулирование в этой сфере, в силу ее быстрого развития, всегда будет отставать от жизни. Как известно, наиболее счастливо живет не то общество, в котором все действия людей регламентированы, а наказания за все дурные поступки прописаны, а то, которое руководствуется в первую очередь соображениями этического порядка. Это значит в данном случае, что государство не злоупотребит информацией, доверенной ему гражданином, потому что оно устроено должным образом; что информация не крадется не потому, что за это предусмотрено наказание, а потому, что человек считает воровство, в любом его проявлении, низким поступком, порочащим его самого. Именно к таким отношениям между государством и личностью, а также между отдельными членами общества мы должны стремиться.

Доктрина информационной безопасности РФ

По мере продвижения к информационному обществу всё более острой становится проблема защиты права личности, общества и государства на конфиденциальность (т. е. секретность) определенных видов информации. Уже сегодня в странах, в которых в массовом порядке используются компьютерные сети, предпринимаются огромные усилия по охране информации. Каждый человек, доверяющий информацию о себе государственному органу или фирме, вправе рассчитывать на то, что она не будет разглашена или использована ему во вред.

В России в 2000 году принята **Доктрина информационной безопасности Российской Федерации.** Рассмотрим ее основные положения.

К объектам информационной безопасности РФ относятся:
- все виды информационных ресурсов;
- права граждан, юридических лиц и государства на получение, распространение и использование информации, защиту информации и интеллектуальной собственности;
- система формирования, распространения и использования информационных ресурсов, включающая в себя информационные системы различного класса и назначения, библиотеки, архивы, базы и банки данных, информационные технологии и т. д.;
- информационная инфраструктура, включающая центры обработки и анализа информации, каналы информационного обмена и телекоммуникации, механизмы обеспечения функционирования телекоммуникационных систем и сетей;
- система формирования общественного сознания (мировоззрение, моральные ценности, нравственные оценки, социально допустимые стереотипы поведения и взаимоотношения между людьми), базирующаяся на средствах массовой информации и пропаганды.

Национальные интересы РФ включают:

а) соблюдение конституционных прав и свобод человека и гражданина в области получения информации и ее использования, обеспечение духовного становления России, сохранение и укрепление ценностей общества;

б) информационное обеспечение государственной политики РФ, связанное с доведением до российской и международной общественности достоверной информации о государственной политике РФ;

в) развитие современных информационных технологий отечественной индустрии информации;

г) защиту информационных ресурсов от несанкционированного доступа, обеспечение безопасности информационных и телекоммуникационных систем.

В доктрине формулируются **методы обеспечения информационной безопасности** страны, включая правовые, организационно-технические и экономические методы, а также особенности обеспечения информационной безопасности РФ в различных сферах общественной жизни: экономической, политической, в сфере обороны, науки и техники и др.

Одной из важнейших проблем в обсуждаемой сфере доктрина объявляет **проблему информационного неравенства**, которое вносит раскол в общество и отчуждение между составляющими его группами населения; поэтому данная проблема имеет прямое отношение к национальной безопасности. Особенно важно преодоление проявлений информационного неравенства в образовании, поскольку:

- появилась тенденция разделения образовательных учреждений на элитные и массовые с соответствующей разницей в ресурсном обеспечении;
- велико различие уровней доходов семей учащихся;
- значителен разрыв в размерах финансового обеспечения образовательных учреждений в различных регионах страны.

Преодоление информационного неравенства является задачей первостепенной государственной важности.

Система основных понятий

Информационное право и информационная безопасность
Основные правовые акты в информационной области
Гражданский кодекс РФ, часть 4, глава 70 «Авторское право, статья 1261 «Программы для ЭВМ» регламентирует юридические вопросы, связанные с авторскими правами на программные продукты
Федеральный закон № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» регулирует отношения, возникающие при: осуществлении права на поиск, получение, передачу и производство информации; применении информационных технологий; обеспечении защиты информации
Федеральный закон № 152-ФЗ «О персональных данных» защищает права и свободы гражданина при обработке его персональных данных
Уголовный кодекс РФ, раздел «Преступления в сфере компьютерной информации» определяет виды информационных преступлений и меры наказания за них
Доктрина информационной безопасности РФ определяет:
объекты информационной безопасности, подлежащие защите
национальные интересы РФ в информационной сфере
методы обеспечения информационной безопасности
пути преодоления информационного неравенства в обществе

Вопросы и задания

1. Зачем нужны законодательные акты в информационной сфере?
2. Какой закон регламентирует права авторов программ и баз данных?
3. Какой закон регламентирует вопросы защиты информационных ресурсов?
4. На какой закон вы сошлетесь, если вам будет нанесен ущерб путем использования информации, касающейся вашей частной жизни?
5. Какие действия Уголовный кодекс классифицирует как преступления в компьютерной информационной сфере?
6. Как вы оцениваете с правовой точки зрения деятельность по созданию и распространению компьютерных вирусов?
7. Какую информацию вы считаете конфиденциальной для государства, для вашей школы, для себя лично?
8. Что относится к объектам информационной безопасности России?
9. Что относится к национальным интересам России в информационной области, требующим защиты?
10. Как проявляется информационное неравенство в системе школьного образования?
11. Сталкивались ли вы в своей жизни с проявлениями информационного неравенства?

4.2. Среда информационной деятельности человека

4.2.1. Компьютер как инструмент информационной деятельности

Понятие информационной среды

Информационная среда — это мир информационной деятельности человека. В **Федеральном законе от 4 июля 1996 г. № 85-ФЗ «Об участии в международном информационном обмене»** информационная среда рассматривается как сфера деятельности субъектов, связанная с созданием, преобразованием, потреблением информации. Человек может одновременно находиться в различных информационных средах, например в информационной среде школы, в информационной среде любителей программирования (изучение специальной литературы, общение со сверстниками, имеющими аналогичное увлечение и т. д.), в информационной среде киберпространства[1)] (работа с различными компьютерными программами, общение в сети Интернет).

Информационную среду можно представить как совокупность накопителей информации (на бумажных, электронных, аудио-, видео- и прочих носителях), каналов передачи информации и пользователей. Важнейшей задачей при организации информационной среды является оперативное предоставление пользователю нужной информации. В настоящее время эта задача усложняется тем, что сведения по одному и тому же вопросу могут находиться в разных, иногда ничем не связанных источниках. Одни и те же сведения можно узнать из книг, из Интернета, из СМИ, из фильма, на школьных уроках от учителя и т. п.

В начале XXI века компьютеры прочно вошли в жизнь многих людей, и естественно, что киберпространство как часть информационной среды играет всё более значительную роль в профессиональной деятельности и в повседневной жизни современного человека.

Правила компьютерной эргономики

Практически любой человек согласится с утверждением, что компьютер значительно облегчил нашу жизнь. Но, как говорится, есть и «обратная сторона медали»: за предоставляемые компьютером удобства многие люди платят (и довольно дорого) своим здоровьем. Связано это с тем, что при работе за компьютером организм человека испытывает определенные нагрузки, характеризующиеся умственным, зрительным, физическим и даже нервным напряжением.

Что же необходимо предпринять, чтобы свести к минимуму все возможные неприятные последствия от работы за компьютером? К настоящему времени сложилась целая наука, которая занимается решением подобных проблем, — компьютерная эргономика.

Компьютерная эргономика (от греч. *ergon* — работа и *nomos* — закон) — это наука, которая занимается изучением взаимоотношений человека и компьютера и определяет, чем может навредить человеку компьютер и как свести к минимуму этот вред.

С точки зрения компьютерной эргономики, для максимального снижения негативного влияния компьютера на нашу жизнь необходимо соблюдение несложных правил. Рассмотрим ряд из них.

1. *Правильная организация рабочего места* (рис. 4.2). Все предприятия в России, использующие компьютерную технику,

1) Киберпространство (англ. *cyberspace*) — это понятие, используемое для представления мира «внутри» компьютеров и «внутри» компьютерных сетей.

обязаны соблюдать определенные нормативы по организации компьютерных рабочих мест в зависимости от целей их использования. Это нормативы описаны в документе «Гигиенические требования к персональным электронным вычислительным машинам и организации работы», СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03.

Согласно нормативам, рабочее место должно быть оборудовано специальным одноместным столом, который должен состоять из двух раздельных рабочих поверхностей: 1) для размещения системного блока и монитора; 2) для размещения клавиатуры (выдвижная часть). Высота стола и стула должна регулироваться. Высота стула должна соответствовать длине голени, чтобы ступни ног полностью стояли на полу. Стул должен быть оборудован спинкой. При наличии высокого стола и стула с нерегулируемой высотой необходимо использовать специальную подставку для ног.

Рис. 4.2. Организация рабочего места

Монитор должен быть установлен таким образом, чтобы пользователь смотрел на экран несколько сверху вниз, а экран монитора располагался под углом примерно 5° от вертикали и на расстоянии не менее 60–70 см от глаз пользователя.

Особые требования предъявляются и к освещенности помещения. Лампы не должны давать бликов на мониторе и быть слишком яркими. Желательно использовать дополнительное боковое освещение, лучше слева.

2. *Правильный выбор монитора.* Еще в 1980-х годах ученые начали разрабатывать параметры безопасности компьютерной тех-

ники, в особенности мониторов. На сегодняшний день для мониторов существуют стандарты TCO'92, '95, '99 и т. д., где число соответствует году их «выхода в свет». Одним из последних стандартов является TCO'07. Производители, чья продукция отвечает стандартам, требованиям, наклеивают на мониторы специальные метки или указывают соответствие стандарту в инструкции.

3. *Соблюдение режима работы.* Продолжительность непрерывной работы за компьютером зависит от возраста. Для младших школьников она не должна превышать 10–15 мин, для старших школьников — 30–40 мин, для взрослых людей — 2 часа. После этого времени рекомендуется делать перерыв, во время которого выполнять специальные упражнения для глаз, а также для мышц шеи, спины, рук и ног.

Правила эксплуатации компьютера

Компьютер относится к числу электрических устройств, поэтому при его эксплуатации необходимо соблюдать ряд правил, которые помогут продлить «жизнь» вашего электронного помощника. Рассмотрим набор основных правил эксплуатации компьютера.

1. Шнур электропитания компьютера и связанных с ним устройств (монитора, принтера) необходимо включать только в заземленную розетку.
2. Использовать источник бесперебойного питания (ИБС) для подключения системного блока и монитора.
3. Регулярно очищать системный блок и монитор от пыли.
4. Не выключать компьютер при кратковременных перерывах в работе, так как электрические приборы испытывают максимальные нагрузки именно в момент включения.
5. Подключение и отключение всех устройств (кроме устройств с интерфейсом USB) осуществлять только при выключенном компьютере.
6. Не употреблять при работе за компьютером пищу и напитки, так как это часто становится причиной выхода из строя компьютерной клавиатуры.
7. Корректно завершать свой сеанс работы и работу операционной системы в целом.
8. Обязательно использовать антивирусные программы и регулярно выполнять проверку компьютера на наличие вирусов.

Подбор конфигурации компьютера в зависимости от выбранной области деятельности

Если нескольким пользователям задать, казалось бы, несложный вопрос: «Какие устройства должны входить в состав современного персонального компьютера?», то, скорее всего, будут даны разные ответы. Кто-то скажет достаточно просто: системный блок, монитор, клавиатура и мышь. Другие пользователи добавят к этому списку принтер и сканер, а третьи — колонки, наушники и джойстик. Некоторые начнут подробно описывать состав самого системного блока, а кто-то укажет даже тип процессора, объемы оперативной памяти и жесткого диска, название видеокарты и прочих комплектующих устройств. Такое разнообразие ответов связано с тем, что каждый пользователь включает в состав компьютера тот набор устройств, который необходим для решения стоящего перед данным человеком круга задач.

Рассмотрим несколько наиболее распространенных сфер применения персонального компьютера[1].

Офисный компьютер. Офисным будем называть компьютер, который используется большей частью для работы с офисными пакетами (Microsoft Office, OpenOffice.org и т. п.), а также, возможно, для выхода в Интернет и локальную сеть организации (школы, офиса или другого учреждения). Для таких компьютеров не нужны мощные процессоры или большой объем оперативной памяти, но зато очень важно, например, наличие хорошего принтера и сканера. Кроме того, такой компьютер не должен требовать больших денежных вложений.

Учебный компьютер. Учебный компьютер по своей комплектации во многом может быть аналогичен офисному компьютеру. Отличия могут касаться нескольких устройств:

- обязательное наличие звуковой карты для воспроизведения звука при просмотре учебных презентаций и энциклопедий;
- необязательное наличие принтера и сканера (возможно использование одного сетевого устройства данного типа на один компьютерный класс);
- необходимость привода DVD-R (для просмотра учебных материалов).

Мультимедийный компьютер — это компьютер, на котором могут быть реализованы все возможности современных приложений, активно использующих работу с графикой, видео и звуком. Для современных мультимедийных компьютеров набор необходимых устройств обычно включает: многоядерный процессор, большой объем ОП, жесткий диск объемом не менее 500 Гбайт (а лучше 1 Тбайт), звуковую карту с поддержкой технологии Dolby Digital, видеокарту с объемом видеопамяти не менее 512 Мбайт и TV-выходом (TV-out), TV-тюнер, акустическую систему (колонки).

Игровой компьютер. Современные игровые приложения являются самыми требовательными к ресурсам компьютера, и поэтому стоимость компьютера-«геймера» обычно намного превосходит

1) Более подробно о подборе конфигурации компьютера и прочих сферах его применения см. в практикуме.

1000 долларов. По своему составу устройств игровой компьютер близок к мультимедийному, однако для компьютеров подобного рода обычно используются специализированные многоядерные процессоры с очень высокой производительностью и большим объемом кэш-памяти. Кроме того, игровые компьютеры обычно должны включать в свой состав игровой джойстик и некоторые другие манипуляторы, необходимые для работы с игровыми симуляторами[1].

Система основных понятий

<table>
<tr><th colspan="4">Компьютер как инструмент информационной деятельности</th></tr>
<tr><td colspan="4">Информационная среда — это мир информационной деятельности человека</td></tr>
<tr><td colspan="4">Компьютерная эргономика — наука, которая занимается изучением взаимоотношений человека и компьютера и определяет, чем может навредить человеку компьютер и как свести к минимуму этот вред</td></tr>
<tr><th colspan="4">Меры безопасности работы за компьютером</th></tr>
<tr><td colspan="2">Правильная организация рабочего места</td><td>Правильный выбор монитора</td><td>Соблюдение режима работы</td></tr>
<tr><td colspan="4">Соблюдение правил эксплуатации обеспечивает работоспособность компьютера</td></tr>
<tr><th colspan="4">Сферы применения компьютера</th></tr>
<tr><td>Офисный компьютер</td><td>Учебный компьютер</td><td>Мультимедийный компьютер</td><td>Игровой компьютер</td></tr>
<tr><td colspan="4">Выбор конфигурации компьютера зависит от сферы применения</td></tr>
</table>

Вопросы и задания

1. Что такое информационная среда?
2. Перечислите, в каких информационных средах вы можете находиться.
3. Чем может быть опасна работа за компьютером? Какие негативные последствия этой работы вы ощутили на себе?
4. Перечислите основные правила мер обеспечения безопасности работы за компьютером.
5. Назовите основные правила эксплуатации компьютера.
6. Как вы думаете, каким основным требованиям должен удовлетворять компьютер, используемый для проведения научных расчетов?

[1] Стимуляторы — программно-аппаратные комплексы, имитирующие управление каким-либо транспортным средством или аппаратом.

4.2.2. Обеспечение работоспособности компьютера

Типичные неисправности компьютера

Даже при соблюдении приведенных в предыдущем параграфе правил никто не гарантирован от возникновения различных неисправностей и проблем при работе с компьютером. Многих пользователей такие ситуации ставят в тупик и заставляют обращаться к знакомым и друзьям, которые помогли бы им разрешить возникшую проблему. Однако ряд подобных неисправностей можно ликвидировать самостоятельно, не обращаясь ни к чьей помощи. Рассмотрим типичные проявления неисправностей компьютера и возможные причины их возникновения.

1. *Компьютер не включается и не подает «признаков жизни».*

Сначала необходимо убедиться в том, что кабель питания системного блока компьютера подключен к розетке, и если вы используете ИБС (источник бесперебойного питания), то что он тоже включен. Если с этим все в порядке, то проверьте, не выпал ли кабель питания из разъема системного блока. Необходимо также убедиться, что тумблер на задней панели системного блока находится в положении «Включено».

Наиболее частой причиной полной неработоспособности компьютера становится выход из строя блока питания. Чтобы проверить эту гипотезу, надо, по возможности, временно поменять его на заведомо работоспособный блок. Если компьютер заработал, то причина неисправности найдена, и необходимо приобрести новый блок питания (обычно их не ремонтируют).

2. *Компьютер не загружается (на мониторе отсутствует изображение), но на системном блоке загорается лампочка и слышен шум вентилятора.*

Для начала проверьте надежность подключения кабелей монитора к сети питания и разъему видеокарты. Некоторые компьютеры «отказываются» включаться, если перепутаны местами мышь с клавиатурой (с интерфейсом PS/2). Возможно, вышел из строя сам монитор. Это легко проверить, подключив к системному блоку работоспособный монитор (если такая возможность имеется).

Другими причинами указанной выше проблемы могут быть выход из строя видеокарты, оперативной памяти (если используется только один ее модуль), процессора или материнской платы. Причем в этих случаях BIOS обычно сигнализирует о неисправности определенным звуковым сигналом. Для уточнения вида неисправности следует обратиться к таблице, которая имеется в инструкции, прилагаемой к материнской плате.

3. *Монитор включается, но система не загружается.*

В этом случае на экран обычно выводится сообщение, в котором указывается причина невозможности дальнейшей загрузки компьютера. В первую очередь проверьте флоппи-дисковод (если таковой имеется) на наличие в нем дискеты, а также привод компакт-дисков на наличие в нем диска. Если в дисководе стоит несистемная дискета или в привод CD/DVD вставлен несистемный диск, то загрузка может прекратиться. Необходимо извлечь эти устройства и нажать клавишу Enter для продолжения загрузки. Если дисководы пусты, то возможно повредились какие-либо системные файлы. В этом случае требуется выполнить либо восстановление операционной системы[1], либо ее переустановку.

4. *Система работает нестабильно («тормозит», перезагружается, «зависает»).*

Если вы заметили, что компьютер стал работать медленнее, чем обычно, то первое, что необходимо сделать, — проверить работоспособность всех вентиляторов (в блоке питания и на процессоре). Выход из строя системы охлаждения приводит к автоматическому понижению тактовой частоты процессора (во избежание его перегрева и выхода из строя), что, естественно, сказывается на производительности компьютера. Возможной причиной замедления работы может стать сильная фрагментация[2] жесткого диска. Нестабильная работа системы во всех ее проявлениях часто связана с заражением компьютера вирусами. В этом случае необходимо выполнить антивирусное сканирование жесткого диска.

Вредоносное ПО и антивирусные программы

Серьезной проблемой для пользователей компьютеров и компьютерных сетей в настоящее время стало широкое распространение вредоносного программного обеспечения, к которому относятся компьютерные вирусы, сетевые черви, троянские программы[3]. Особенно эта проблема стала актуальна в связи с массовым подключением компьютеров пользователей к Интернету. Вредоносное программное обеспечение может принести достаточно серьезный урон пользователям, вплоть до порчи данных на носителях, а также невозможности дальнейшей работы с компьютером.

Для борьбы с вредоносным ПО существует специализированное программное обеспечение, называемое антивирусными программами.

---

[1] Подробнее о порядке восстановления читайте в практикуме.

[2] Подробнее о фрагментации читайте в практикуме.

[3] О типах вредоносных программ см. в практикуме.

Антивирусные программы — программы, которые предотвращают заражение компьютерным вирусом и ликвидируют последствия заражения.

Практически все наиболее известные антивирусные программы обязательно содержат в своем составе две обязательных части: монитор (on access) и сканер (on demand).

Сканеры работают по следующей схеме: пользователь хочет что-либо проверить и выдает запрос (demand), после чего осуществляется проверка указанных объектов (дисков, папок, файлов) на наличие вирусов. **Монитор** — это резидентная программа, которая отслеживает доступ к каждому объекту и в момент доступа осуществляет проверку.

Большинство антивирусных программ производят поиск вирусов на основе **антивирусных баз,** содержащих сигнатуры вирусов.

Сигнатура вируса — это информация, позволяющая однозначно определить наличие данного вируса в файле или ином коде. Примерами сигнатур являются: уникальная последовательность байтов, присутствующая в данном вирусе и не встречающаяся в других программах; контрольная сумма такой последовательности и т. д. Так как количество вирусов с каждым днем неуклонно растет, разработчики антивирусных программ постоянно дополняют антивирусные базы новыми сигнатурами, поэтому пользователям необходимо как можно чаще выполнять обновление своих антивирусных баз. Для этого после покупки антивирусной программы необходимо приобрести подписку у производителя (обычно на год). Обычно это можно сделать через сайт производителя. При наличии подписки большинство антивирусных программ автоматически загружают обновления при подключении к Интернету.

Помимо сканера и монитора, многие антивирусные программы включают в свой состав эвристические анализаторы (позволяющие обнаруживать даже еще неизвестные вирусы), модуль для проверки электронной почты, карантин, перехватчик скрипт-вирусов и т. д. В настоящее время в России наиболее популярны следующие антивирусные программы: Антивирус Касперского, Dr.Web, NOD32, Panda и ряд других.

Безопасность компьютерных сетей

После того как в мире стали широко распространяться компьютерные сети, в информационной среде возник новый вид преступлений — хакерство.

Хакерство — это проникновение человека (хакера) в какую-либо информационную систему без согласия ее хозяина (или администратора). Последствия от действий хакеров могут быть достаточно серьезными: материальные убытки, недоступность информационных служб и даже угроза жизни людей, если работа информационной системы связана с вопросами жизнеобеспечения (медицинская помощь, системы безопасности). Вследствие этого системные администраторы должны предпринимать ряд мер для защиты компьютерных сетей от взлома. К этим мерам, в частности, относятся:

1) использование средств идентификации пользователей (обычно паролей);
2) разграничение прав доступа для пользователей;
3) использование специальных программ-брандмауэров, позволяющих ограничить доступ к сети «извне»;
4) ликвидация уязвимостей программного обеспечения посредством установки «патчей[1]»;
5) обязательное использование антивирусных программ;
6) регулярное протоколирование[2] и аудит[3] средствами операционной системы.

Система основных понятий

<table>
<tr><th colspan="2">Обеспечение работоспособности компьютера</th></tr>
<tr><td colspan="2">Важное качество грамотного пользователя — способность самостоятельно диагностировать и ликвидировать простые сбои в работе компьютера</td></tr>
<tr><td colspan="2">Антивирусные программы — программы, которые предотвращают заражение компьютерным вирусом и ликвидируют последствия заражения</td></tr>
<tr><th colspan="2">Основные компоненты антивирусных программ</th></tr>
<tr><td>Монитор — резидентная программа, которая отслеживает доступ к каждому объекту и в момент доступа осуществляет проверку</td><td>Сканер осуществляет проверку на наличие вирусов только по запросу пользователя</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сигнатура вируса — это информация, позволяющая однозначно определить наличие данного вируса в файле или ином коде</td></tr>
<tr><td colspan="2">Хакерство — это проникновение человека (хакера) в какую-либо информационную систему без согласия ее хозяина (или администратора)</td></tr>
</table>

[1] Патч — это отдельно поставляемое программное средство, используемое для устранения ошибок в программном обеспечении.

[2] Протоколирование — это сбор и накопление информации о событиях, происходящих в информационной системе.

[3] Аудит — это анализ накопленной информации, проводимый оперативно, в реальном времени или периодически.

Вопросы и задания

1. Почему при работе на компьютере необходимо использовать источник бесперебойного питания?
2. Перечислите ваш порядок действий, если компьютер перестал загружаться и на системном блоке не загорается ни одна лампочка.
3. Перечислите причины, которые могут привести к уменьшению производительности компьютерной системы.
4. Что такое антивирусная программа? Из каких основных компонентов она состоит?
5. Что такое сигнатура вируса?
6. Почему необходимо регулярно выполнять обновление антивирусных баз? Что необходимо сделать для их автоматического обновления?
7. Чем опасны хакеры?
8. Какие меры безопасности необходимо соблюдать для защиты компьютерных сетей от взлома?

4.3. Примеры внедрения информатизации в деловую сферу

4.3.1. Информатизация управления проектной деятельностью

Информационные технологии широко используются в управленческой деятельности разного уровня — от государственной службы до предприятия. В декабре 2009 года в России начало работу **Электронное правительство** — новая форма организации деятельности государственной власти, которая обеспечивает быстрый и удобный доступ граждан (через Интернет) к информации о деятельности государственных органов, а также возможность оперативного оказания государственных услуг, таких как услуги, оказываемые ГИБДД, Федеральной миграционной службой, Пенсионным фондом РФ, Федеральной налоговой службой. Формирование Электронного правительства в Российской Федерации стало возможным благодаря широкому распространению информационно-коммуникационных технологий, а также повышению уровня компьютерной грамотности среди населения и в органах государственной власти.

Персональные компьютеры, современные средства коммуникации позволяют учреждениям и государственным служащим получать в нужное время и в полном объеме информацию, необходимую для решения профессиональных задач. Сфера применения информационных технологий и развитых средств коммуникации в управленческой деятельности весьма обширна. Она включает различные аспекты: обеспечение служебной переписки и передачи документов, сложнейшие задачи анализа и поддержки принятия управленческих решений, поддержку управления проектной деятельностью.

Что такое проектная деятельность

В настоящее время в организациях, фирмах, на производстве можно выделить два вида человеческой деятельности: **операционную** и **проектную**.

Операционная деятельность применяется там, где работа носит рутинный характер, т. е. все функции работников определены и постоянны, все производственные операции отлажены, а условия, в которых выполняются работы, хорошо известны и стабильны. Примером такой деятельности может служить выпуск автомобилей на конвейере.

Если же разрабатывается новый продукт или услуга, требования к которым постоянно меняются, производственные технологии используются впервые, требуются творчество и интеллектуальные усилия, то в этом случае наиболее эффективной будет проектная деятельность, т. е. организация и управление работой через проекты. Примером проектной деятельности может служить разработка новой модели автомобиля, создание космического корабля, подготовка праздничного мероприятия, строительство нефтепровода. Существуют организации, основанные только на проектной деятельности. Примерами могут служить строительные организации, занимающиеся проектированием зданий, конструкторские бюро, архитектурные фирмы. В настоящее время разработка программного обеспечения часто реализуется через проекты.

Проект — это деятельность людей, направленная на создание уникального продукта или услуги.

Любой проект носит **временный характер**, т. е. имеет дату начала и дату завершения. Проект может быть завершен по достижении своих целей, либо при осознании, что цели проекта не могут быть достигнуты, либо в том случае, когда необходимость в проекте отпала, и он прекращается. Проект можно считать успешным, если:

1) достигнуты его цели:
2) проект завершился в срок:
3) проект выполнен в рамках бюджета, т. е. запланированные затраты не превышены.

Любой проект выполняется людьми, ограничен ресурсами, планируется, исполняется и управляется[1]. Каждый проект проходит в своем развитии четыре стадии: инициацию, планирование, реализацию и завершение (рис. 4.3).

Рис. 4.3. Стадии проекта

На стадии **инициации** формулируются цели проекта, т. е. необходимо определить, что будет получено в результате выполнения проекта и зачем.

На стадии **планирования** определяется состав и структура работ, направленных на достижение целей проекта, а также ресурсы (трудовые и материальные), которые необходимо привлечь для выполнения проектных работ. **Трудовые ресурсы** — это люди и оборудование. Особенность трудовых ресурсов состоит в том, что после окончания работы они не заканчиваются и могут быть назначены для исполнения других работ, т. е. это возобновляемые ресурсы. **Материальные ресурсы** — это материалы и сырье. Они в процессе выполнения используются полностью и после окончания недоступны для других работ, т. е. это невозобновляемые ресурсы. Примером может служить электроэнергия. Стадия планирования завершается сохранением **базового плана**. Это своеобразный эталон, с которым будет сравниваться текущее состояние дел (текущий план) на этапе реализации проекта.

Именно на этапе **реализации** происходит воплощение идей проекта в жизнь. На этой стадии велика роль менеджера, ответственного за успех проекта. Отслеживая ход работ по проекту, сравнивая текущие данные с данными базового плана, менеджер должен принимать верные решения в тех случаях, если проект отстает по срокам или превышает бюджет проекта, т. е. управлять проектом. Такими решениями могут быть решения о замене или привлечении новых ресурсов, прекращении некоторых работ, включении в проект новых работ.

На стадии **завершения** необходимо подтвердить, что разработан именно тот продукт (или услуга), который был задуман первоначально. Как правило, редкий проект выполняется в точном соответствии с первоначальными планами, поэтому важным элементом стадии завершения является анализ причин расхождения.

---

1) В качестве самостоятельной области знаний управление проектами начало формироваться в начале XX века.

Информационная технология проектной деятельности

Программные системы управления проектами. В настоящее время проектная деятельность, управление проектами, как правило, происходит с использованием специального программного обеспечения — **систем управления проектами**, которые позволяют планировать проектные работы, просчитывать последствия принимаемых решений, отслеживать ход выполнения работ. Существуют программные системы, позволяющие координировать сразу несколько проектов (мультипроектное управление), предоставляющие возможность совместной работы коллектива разработчиков над одним проектом. В России наиболее популярными являются следующие программные системы управления проектами: Microsoft Project (производитель Microsoft, США), Spider Project (производитель Spider Technologies Group, Россия), Primavera (производитель Primavera Systems, США) и некоторые другие. Перечисленные программы относятся к профессиональным системам управления проектами.

Пример управления проектом. Рассмотрим пример разработки плана проекта, в результате реализации которого должна быть оборудована детская площадка на территории детского сада.

Выделим следующую структуру работ (задач) проекта; некоторые из них в дальнейшем будут детализированы.

1. Сбор и анализ требований.
2. Подготовка места для площадки.
3. Оформление площадки.
4. Открытие площадки.

Задача «Сбор и анализ требований» может быть разбита на подзадачи: подготовка и рассылка анкеты, с помощью которой можно выяснить пожелания родителей, педагогов, медицинских работников; сбор и анализ анкет; формулирование требований к площадке.

Задачу «Подготовка места для площадки» разобьем на подзадачи: демонтаж старой площадки; выравнивание грунта.

Задача «Оформление площадки» включает подзадачи: составление плана размещения игровых элементов на площадке; заказ и поставка игровых элементов; монтаж игровых элементов; озеленение площадки.

Таким образом, проектные работы имеют иерархическую структуру. Задачи, находящиеся на первом уровне иерархии имеют одинарную нумерацию, на втором уровне (подзадачи) — двойную нумерацию и т. д. Для каждой из подзадач укажем длительность. Задачи, состоящие из подзадач, называются *суммарными* *задачами*. Для них длительность не указывается, а вычисляется в зависимости от длительности подзадач и способов связи между ними. Самым распространенным типом связи между задачами является связь «Окончание — Начало», т. е. следующая задача начинается после окончания предыдущей. На рисунке 4.4 задачи представлены в виде отрезков, а связь между ними изображена стрелкой.

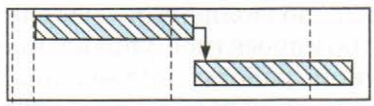


Рис. 4.4. Связь между задачами в проекте

Всю информацию представим в виде таблицы (табл. 4.2).

Для наглядного отображения плана работ проекта часто используется диаграмма Ганта[1)], где каждая задача представлена в виде отрезка, длина которого совпадает с календарной длительностью задачи. Если задача имеет длительность 3 дня и начинается в пятницу, то календарная длительность этой задачи составит 5 дней, так как будут учтены нерабочие дни — суббота и воскресенье. Задачи, представленные в виде отрезков, накладываются на шкалу времени. Запланируем дату начала нашего проекта — 10 августа 2009 года. Можно нарисовать такую диаграмму вручную. На рисунке 4.5 представлена диаграмма Ганта, выполненная с помощью Microsoft Project. Черными отрезками изображены суммарные задачи. Стрелками показаны связи между задачами. Из диаграммы видно, что проект должен закончиться во вторник 15 сентября 2009 года.

Теперь займемся планированием ресурсов, используемых для выполнения проектных работ. На этом этапе следует определить, какие ресурсы и в каком количестве нам необходимы. Представим результаты планирования в виде таблицы (табл. 4.3).

Всю информацию об используемых ресурсах можно представить в виде таблицы. Такая таблица в программе Microsoft Project называется *Лист ресурсов* (рис. 4.6). Следует обратить внимание на то, что трактор относится к трудовым ресурсам. Для того чтобы можно было рассчитать стоимость проекта, необходимо внести информацию об оплате труда для трудовых ресурсов, стоимости 1 литра бензина, 1 квадратного метра рулонного газона, стоимости игровых элементов.

После назначения ресурсов для задач в соответствии с таблицей планирования ресурсов необходимо проверить, нет ли ситу-

[1)] Названа в честь Генри Ганта, который ввел ее в использование в годы Первой мировой войны.

Таблица 4.2

Структура задач проекта

Номер в структуре	Задача	Подзадача	Длительность	Предшественники
1	Сбор и анализ требований			
1.1		Подготовка и рассылка анкеты	2 дня	Нет
1.2		Сбор и анализ анкет	5 дней	Подготовка и рассылка анкеты
1.3		Формулировка требований	3 дня	Сбор и анализ анкет
2	Подготовка места для площадки			
2.1		Демонтаж старой площадки	3 дня	Нет
2.2		Выравнивание грунта	2 дня	Демонтаж старой площадки
3	Оформление площадки			
3.1		Составление плана размещения игровых элементов на площадке	4 дня	Формулирование требований
3.2		Заказ и поставка игровых элементов	7 дней	Составление плана размещения игровых элементов
3.3		Монтаж игровых элементов	3 дня	Выравнивание грунта. Заказ и поставка игровых элементов
3.4		Озеленение площадки	2 дня	Монтаж игровых элементов
4	Открытие площадки		1 день	Озеленение площадки

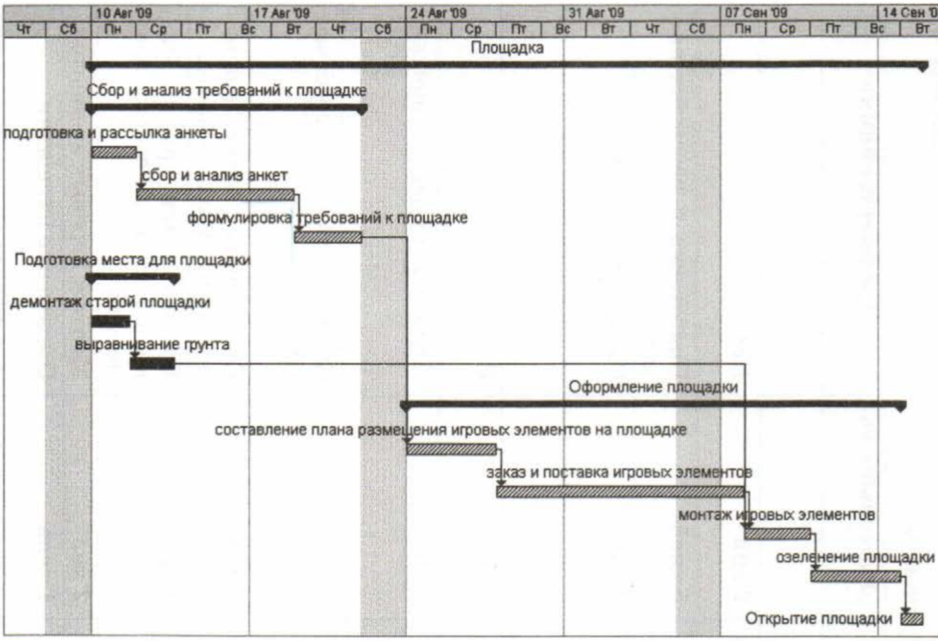


Рис. 4.5. Диаграмма Ганта

Название ресурса	Тип	Макс. единиц	Стандартная ставка
Менеджер	Трудовой	1	400,00р./ч
Рабочий	Трудовой	4	100,00р./ч
Водитель	Трудовой	1	150,00р./ч
Дизайнер	Трудовой	1	450,00р./ч
Озеленитель	Трудовой	2	200,00р./ч
Ведущий праздника	Трудовой	1	350,00р./ч
Трактор	Трудовой	1	100,00р./ч
Бензин	Материальный		20,00р.
Рулонный газон	Материальный		100,00р.
Игровые элементы	Материальный		15 000,00р.

Рис. 4.6. Лист ресурсов

аций, когда тот или иной трудовой ресурс «перегружен», т. е. мы пытаемся использовать ресурс, а он в это время, например, занят в других работах, или назначаем трудовой ресурс для задачи в большем количестве, чем располагаем. Перегруженным может быть только трудовой ресурс. В нашем случае таких ситуаций нет.

Таблица 4.3

Планирование ресурсов проекта

Номер в структуре	Задача	Подзадача	Ресурс	Количество
1	Сбор и анализ требований			
1.1		Подготовка и рассылка анкеты	Менеджер	1
1.2		Сбор и анализ анкет	Менеджер	1
1.3		Формулирование требований	Менеджер	1
2	Подготовка места для площадки			
2.1		Демонтаж старой площадки	Рабочий Водитель Трактор Бензин	3 1 1 3 литра
2.1		Выравнивание грунта	Рабочий Водитель Трактор Бензин	1 1 1 3 литра
3	Оформление площадки			
3.1		Составление плана размещения игровых элементов на площадке	Дизайнер	1
3.2		Заказ и поставка игровых элементов	Менеджер Игровые элементы	1 1
3.3		Монтаж игровых элементов	Рабочий	4
3.4		Озеленение площадки	Озеленитель Рулонный газон	2 40 кв. м
4	Открытие площадки		Ведущий праздника	1

Предварительную оценку стоимости проекта (затрат проекта) можно получить только после того, как будет проведено назначение ресурсов задачам. Стоимость всего проекта складывается из стоимости всех задач проекта. Стоимость каждой задачи определяется из стоимости всех ресурсов, назначенных для нее. Например, вычислим стоимость для задачи «Озеленение площадки»:

$$\text{Стоимость} = 200 \text{ руб./ч} \cdot 32 \text{ ч} + 100 \text{ руб./м}^2 \cdot 40 \text{ м}^2 = 10\,400 \text{ руб.}$$

Здесь мы учли, что для выполнения этой задачи требуется 40 квадратных метров рулонного газона и два озеленителя, которые

	Название задачи	Общие затраты
0	**⊟ Площадка**	**120 240,00р.**
1	**⊟ Сбор и анализ требований к площадке**	**32 000,00р.**
2	подготовка и рассылка анкеты	6 400,00р.
3	сбор и анализ анкет	16 000,00р.
4	формулировка требований к площадке	9 600,00р.
5	**⊟ Подготовка места для площадки**	**13 640,00р.**
6	демонтаж старой площадки	7 980,00р.
7	выравнивание грунта	5 660,00р.
8	**⊟ Оформление площадки**	**71 800,00р.**
9	составление плана размещения игровых элементов	14 400,00р.
10	заказ и поставка игровых элементов	37 400,00р.
11	монтаж игровых элементов	9 600,00р.
12	озеленение площадки	10 400,00р.
13	Открытие площадки	2 800,00р.

Рис. 4.7. Распределение затрат проекта

будут работать в течение двух рабочих дней по 8 часов, т. е. 32 часа.

В программе Microsoft Project реализован алгоритм расчета стоимости проекта. Результат такого расчета представлен на рис. 4.7. Общая стоимость проекта составляет 120 240 руб. Рисунок 4.7 демонстрирует распределение затрат по суммарным задачам и подзадачам проекта.

На этом этап планирования проекта может быть завершен. В результате мы знаем дату начала (10 августа 2009 года) и окончания проекта (15 сентября 2009 г.) и его предварительную стоимость (120 240 руб.). Данный план может быть сохранен как базовый.

Система основных понятий

Информатизация управления проектной деятельностью
Проект — это деятельность людей, направленная на создание *уникального* продукта или услуги
Электронное правительство — крупнейший федеральный проект в области информатизации (2009 г.)
Показатели успешности проекта: • реализация всех поставленных целей; • соблюдение сроков проекта (дат начала и конца); • соблюдение рамок бюджета
Стадии прохождения проекта: 1. Инициация (формулировка цели и результатов проекта). 2. Планирование (определение структуры работ, графика, необходимых ресурсов). 3. Реализация (процесс выполнения базового плана). 4. Завершение (подтверждение достижения целей проекта, анализ причин расхождения с базовым планом)
Система управления проектами — специализированное программное обеспечение (пример — программа Microsoft Project). Используется на стадии планирования проекта и реализации проекта
Состав базового плана, формируемого с помощью системы управления проектами: 1. Таблица иерархической структуры задач проекта. 2. Диаграмма Ганта: графическая модель календарного плана работы над проектом. 3. Лист ресурсов: таблица со списком трудовых и материальных ресурсов и их стоимостью. 4. Таблица распределения затрат: отдельно по задачам и по всему проекту

Вопросы и задания

1. Что такое операционная деятельность? Приведите примеры.
2. Что такое проектная деятельность? Приведите примеры.
3. Какие задачи решаются на стадии инициации проекта?
4. Какие задачи решаются на стадии планирования проекта?
5. Какие задачи решаются на стадии реализации проекта?
6. Какие задачи решаются на стадии завершения проекта?
7. Какие типы ресурсов существуют?
8. Приведите примеры возобновляемых ресурсов.
9. Приведите примеры невозобновляемых ресурсов.
10. Что такое суммарная задача?
11. Что означает связь «Окончание — Начало» между задачами?
12. Приведите примеры, когда ресурс может быть «перегружен».
13. Может ли быть «перегруженным» материальный ресурс?
14. Как вычисляется стоимость (затраты) отдельной задачи?
15. Как вычисляется стоимость (затраты) всего проекта?
16. Что такое базовый план? Какова его роль на этапе реализации проекта?

4.3.2. Информатизация в образовании

Этапы информатизация школьного образования

Информатизация образования ориентирована на оптимальное и эффективное использование современных средств ИКТ в процессах обучения, воспитания, управления учебным процессом. В России процесс информатизации общего среднего образования начинался с введения в школьную программу курса информатики в 1985 году. С тех пор и до настоящего времени информатизация школы в своем развитии прошла несколько этапов.

1-й этап. *Оснащение школ компьютерными классами для проведения уроков информатики.* Этот этап оказал сильное влияние на развитие в нашей стране производства отечественных микро-ЭВМ различных моделей: Электроника-УКНЦ, Электроника БК-0010, Корвет и др.

2-й этап. *Оборудование школ сетевыми компьютерными классами, разработка обучающих программ по отдельным предметам.* На этом этапе сфера применения компьютеров в учебном процессе становится шире: уроки информатики, компьютерное тестирование и использование обучающих программ по отдельным предметам, автоматизация простейших административных функций, таких как создание базы данных учеников и сотрудников школы средствами электронных таблиц.

3-й этап. *Оснащение школ мультимедийными компьютерами, подключение к Интернету, использование цифровых образовательных ресурсов на компакт-дисках* (обучающие программы, электронные учебники, системы тестирования и пр.). На этом этапе в школах формируются медиацентры. На уроках физики, химии, биологии используются мультимедийные обучающие программы. Для эффективного управления учебным процессом начинают применяться программные средства подготовки расписания занятий.

4-й этап. *Подключение школ к Интернету по скоростным каналам связи, создание школьных сайтов, распространение дистанционного обучения, организация доступа к цифровым образовательным ресурсам сети Интернет, использование электронной почты, использование новых технических средств, таких как интерактивная доска*[1], *в учебном процессе.*

Использование **интерактивных досок** помогает разнообразить занятия, сделать их увлекательными. Перед началом работы интерактивная доска подключается к компьютеру и проектору. Чтобы управлять компьютером, достаточно только коснуться экрана. Специальное программное обеспечение для интерактивных досок позволяет работать с текстами, изображениями, аудио- и видеоматериалами, интернет-ресурсами, делать записи с помощью специальных маркеров прямо поверх открытых документов и сохранять информацию для последующего использования.

Что такое информационная среда школы

Следующий этап информатизации образования предполагает создание **информационной образовательной среды школы** (ИОСШ), которая позволит организовать учебный процесс на основе взаимодействия учащихся, учителей, родителей, администрации школы посредством возможностей Интернета.

Основой информационно-образовательной среды школы должна стать **автоматизированная система управления учебным процессом**, которая может выполнять следующие функции:

- обеспечивать учет преподавательского и ученического состава школы;
- предоставлять средства для построения учебных планов и составление расписания;
- вести учет успеваемости и посещаемости учеников;
- обеспечивать доступ к учебным материалам, подготовленным учителями школы, и к цифровым образовательным ресурсам Интернета;

[1] Первая в мире интерактивная доска была представлена компанией SMART Technologies Inc. в 1991 г.

- поддерживать дистанционную форму обучения;
- обеспечивать возможность формирования электронного портфолио[1] ученика и учителя;
- обеспечивать доступ родителей через сайт школы к информации об успеваемости и посещаемости их детей.

Таким образом, пользователями автоматизированной системой управления учебным процессом становится администрация школы в лице директора и завуча, а также учителя, ученики и их родители.

В настоящее время в школах Российской Федерации информационная образовательная среда находится на этапе становления, лишь отдельные ее элементы реализованы в некоторых школах. Например, для взаимодействия с родителями и учащимися используется система электронных журналов и дневников. С ее помощью родители имеют возможность контролировать успеваемость ребенка, узнавать вовремя о родительском собрании, получать все замечания учителя. Ученикам такая система напомнит расписание уроков и домашнее задание.

Формирование информационной образовательной среды школы, в конечном счете, направлено на повышение качества результатов образовательного процесса. Насколько эффективно будут использоваться возможности информационной среды, зависит от ее участников, их компьютерной грамотности, технического и программного оснащения школ.

Единый государственный экзамен

За последние годы самым крупным федеральным проектом, повлиявшим на прогресс информатизации системы образования, стал Единый государственный экзамен (ЕГЭ), введенный в обязательном порядке во все регионы России в 2009 году.

Проект ЕГЭ решает масштабную задачу — объективной оценки результатов обучения выпускников всех школ страны. Ежегодно в России ЕГЭ сдают около 1 миллиона выпускников школ. Реализация ЕГЭ — это работа с огромным объемом информации, которую требуется провести на большой территории в ограниченное время со стопроцентным качеством. Выполнение такой работы невозможно без применения информационно-коммуникационных технологий.

На рисунке 4.8 приведена структурная схема функционирования ЕГЭ, на которой стрелками указаны маршруты передачи информации, ее преобразование и хранение в процессе проведения ЕГЭ. Поясним эту схему.

[1] *Портфолио* — в переводе с итальянского: «папка с документами». Электронный портфолио — сайт, отражающий личные достижения его владельца.

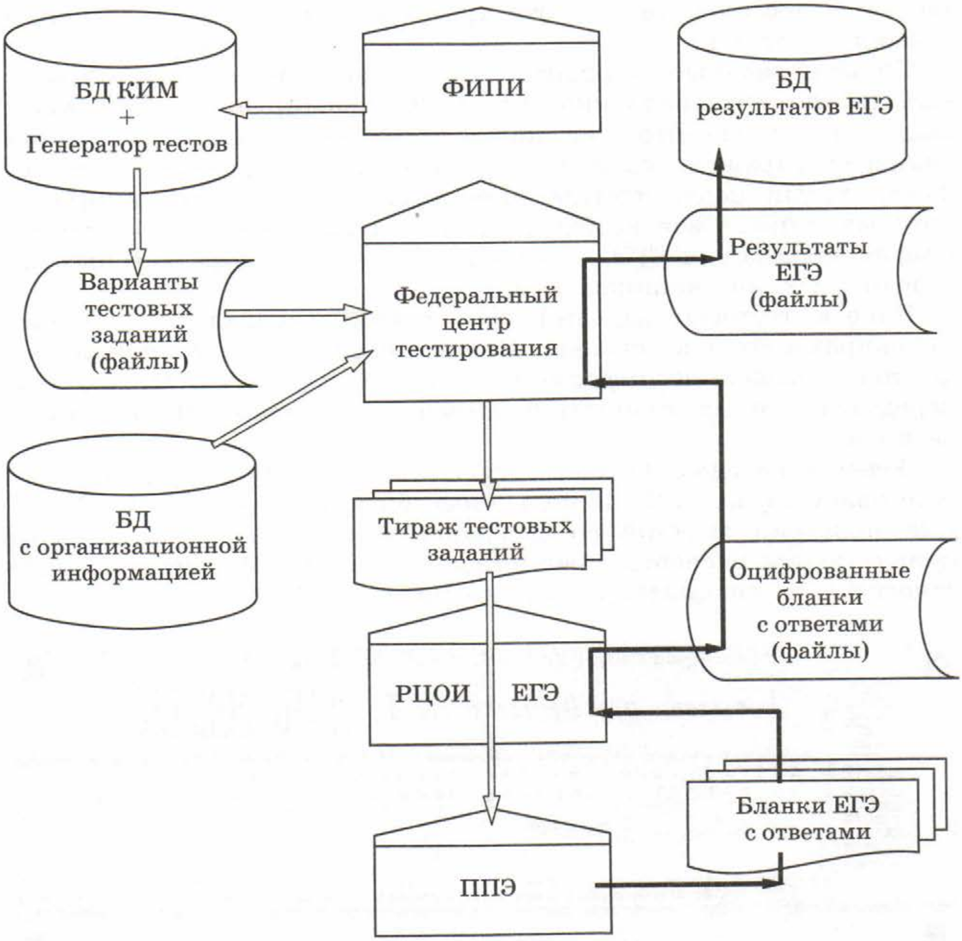


Рис. 4.8. Структура функционирования системы ЕГЭ

В Москве находится Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ), который занимается разработкой *контрольно-измерительных материалов* (КИМ) по всем школьным предметам, по которым проводится ЕГЭ. Все эти материалы хранятся в *базе данных* (БД КИМ). Основная форма проведения ЕГЭ — тестирование. Тестовые задания формируются автоматически с помощью специальной программы — генератора тестов. Для проведения ЕГЭ требуется большое количество вариантов тестов. Программа генерирует тесты путем выбора заданий из базы КИМ. Однако это не совсем случайный выбор. Качественный тест должен удовлетворять многим требованиям, установленным наукой о тестах — тестологией. Все эти требования заложены в алгоритм генератора тестов.

Сгенерированные варианты тестов передаются в *Федеральный центр тестирования*, который тиражирует их в нужном количестве с расчетом на каждого ученика. Для определения размеров тиражей, сроков их подготовки и адресов передачи Федеральный центр тестирования работает с базами данных, в которых собрана вся необходимая организационная информация: график проведения ЕГЭ, списки регионов, структура учебных заведений, состав учащихся и пр.

Пакеты тестовых заданий через специальную систему доставки направляются в регионы. Пакеты поступают в *Региональные центры обработки информации ЕГЭ* (РЦОИ ЕГЭ). Оттуда они передаются во все *пункты проведения экзамена* (ППЭ) данного региона.

Отвечая на задания теста, ученики заполняют машиночитаемые бланки (рис. 4.9). Заполненные бланки поступают в РЦОИ. Для проверки заданий со свободной формой ответов (часть С) привлекаются эксперты предметных комиссий. Их оценки также заносятся на специальные машиночитаемые бланки.

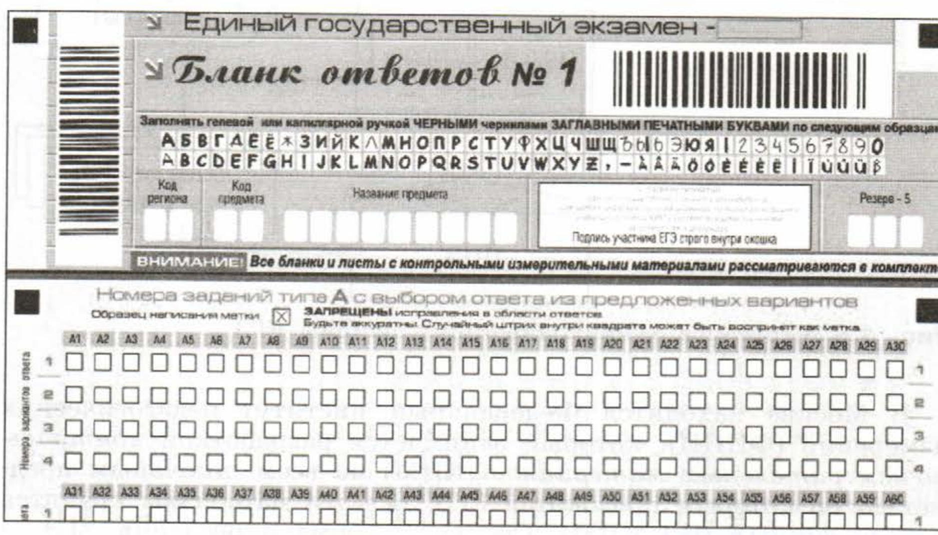


Рис. 4.9. Фрагмент машиночитаемого бланка ответов ЕГЭ

Затем РЦОИ производит сканирование и оцифровку заполненных бланков. Полученные файлы передаются в Федеральный центр тестирования, где подвергаются автоматической обработке. В процессе обработки компьютеры подсчитывают набранное каждым учеником количество баллов (*первичный балл*), которое переводится в принятую нормативную шкалу (*тестовый балл*). После этого результаты сохраняются в *федеральной базе данных результатов ЕГЭ*.

Помимо тестирования с использованием бумажных бланков, существует технология компьютеризированного ЕГЭ. В этом случае все виды работы производятся на компьютере, в том числе и ввод учениками ответов на тестовые задания.

База данных результатов ЕГЭ позволяет выполнять любые запросы: от результатов отдельных учеников до любой статистики по школам, регионам, дисциплинам и пр. На рисунке 4.10 приведен один из результатов статистической обработки ЕГЭ по информатике в 2009 и в 2010 годах.

Рис. 4.10. Распределение учащихся по тестовым баллам (в 100-балльной шкале) по результатам ЕГЭ по информатике и ИКТ в 2009 и 2010 годах

В реализации ЕГЭ в масштабах Российской Федерации использованы самые передовые информационные технологии. Это отраслевая задача. Она привела к созданию инфраструктуры, включающей в себя кадры, технику, информационное и программное обеспечение. Вся эта система работает регулярно, а не только в период проведения Единого государственного экзамена.

Система основных понятий

Информатизация в образовании
Этапы информатизации общеобразовательных школ в России (с конца 1980-х годов): 1. Оснащение школ компьютерными классами для проведения уроков информатики. 2. Оборудование школ сетевыми компьютерными классами, разработка обучающих программ по отдельным предметам. 3. Оснащение школ мультимедийными компьютерами, начало подключения к Интернету, использование цифровых образовательных ресурсов на компакт-дисках. 4. Подключение всех школ к Интернету по скоростным каналам, формирование информационной среды школы
Информационная образовательная среда школы (ИОСШ) формируется на основе внедрения автоматизированной системы управления учебным процессом
Последствие создания ИОСШ: возможность взаимодействия учащихся, учителей, родителей, администрации школы через Интернет
Проект ЕГЭ привел к созданию отраслевой инфраструктуры, включающей в себя кадры, технику, информационное и программное обеспечение. В проекте ЕГЭ использованы самые передовые информационные технологии

Вопросы и задания

1. Перечислите основные этапы информатизации общего образования в нашей стране и их содержание.
2. С какой целью создается информационная образовательная среда школы?
3. Перечислите участников информационной образовательной среды школы (ИОСШ) и предоставляемые им возможности в этой среде.
4. Какие элементы ИОСШ уже существуют в вашей школе? Какие элементы, с вашей точки зрения, должны быть внедрены в первую очередь?
5. Почему внедрение ЕГЭ требует использования информационно-коммуникационных технологий?
6. Перечислите основные этапы прохождения ЕГЭ, а также виды и формы связанной с ним информации.
7. Как вы думаете, почему при заполнении бланка ответов ЕГЭ необходимо следовать строгим правилам? Какие могут быть последствия их нарушения?
8. ЕГЭ по информатике — экзамен по выбору. Естественно ли в этом случае такое распределение учащихся по результатам, как показано на рис. 4.10?

9. Сравнивая распределения по результатам ЕГЭ на рис. 4.10, сделайте вывод: в каком году качество сдачи ЕГЭ было лучше, в 2009 или в 2010?
10. Как вы думаете, какой характер имело бы распределение по оценкам, если бы ЕГЭ по информатике был обязательным экзаменом для всех выпускников школы?

О профессиях: профессии и подготовка специалистов в области ИТ[1]

Профессиональные стандарты для ИТ-специалистов

Виды профессиональной деятельности людей, направленной на разработку и сопровождение программно-технических систем работы с информацией, относят к области информационных технологий (далее сокращенно ИТ; в англоязычной версии — IT). А специалистов, владеющих этими профессиями, называют ИТ-специалистами.

В настоящее время в сфере информационных технологий в России трудится порядка 1 млн специалистов. При этом область ИТ испытывает дефицит в квалифицированных кадрах. В силу быстрого развития отрасли растет не только потребность в количестве специалистов, но и требования к их квалификации. Ведущие специалисты ИТ-предприятий, объединенных в *Ассоциацию предприятий компьютерных и информационных технологий*, разработали и опубликовали обширный документ под названием «*Профессиональные стандарты в области информационных технологий*». В этом документе названы девять наиболее массовых и востребованных профессий в области ИТ. Вот их список.

1. **Программист.**
2. **Системный архитектор.**
3. **Специалист по информационным системам.**
4. **Системный аналитик.**
5. **Специалист по системному администрированию.**
6. **Менеджер информационных технологий.**
7. **Менеджер по продажам решений и сложных технических систем.**
8. **Специалист по информационным ресурсам.**
9. **Администратор баз данных.**

Для каждой специальности выделены от четырех до семи квалификационных уровней. Для каждого уровня подробно описан круг должностных обязанностей, профессиональных знаний, умений и навыков. О некоторых специальностях из этого списка мы рассказывали в нашем учебнике. Подробно с профессиональными стандартами можно ознакомиться через Интернет[2].

---

[1] Материал подготовлен при участии профессора С. В. Русакова.

[2] http://www.apkit.ru/committees/education/meetings/standarts.php

Подготовка специалистов в области информатики и информационных технологий

Работа по ИТ-специальностям требует серьезной профессиональной подготовки. Такую подготовку дают учебные заведения системы профессионального образования. Заметим, что подготовка, которую дают учреждения среднего профессионального образования (колледжи, училища), обеспечивает трудоустройство лишь на первом квалификационном уровне и только для специальностей с номерами 1, 3, 5, 7, 8 из приведенного выше списка. Все остальные специальности и уровни квалификации требуют вузовской подготовки. Причем диплом бакалавра (4 года обучения) дает возможность подняться не выше третьей квалификационной ступени. Для дальнейшего профессионального роста требуется либо диплом специалиста, либо магистра (от 5 до 6 лет обучения в вузе). Кроме того, существует послевузовский этап обучения, который называется аспирантурой. Человек, закончивший аспирантуру, защищает диссертацию на степень кандидата наук. Информационные технологии являются весьма наукоемкой областью деятельности, поэтому наличие у ведущего специалиста и руководителя в этой области ученой степени кандидата или даже доктора наук — явление достаточно распространенное.

Перечень существующих в вузах России направлений подготовки (для бакалавров) и специальностей (для специалистов и магистров), выпускающих специалистов в области информатики и ИТ, включает в себя около 30 позиций. Некоторые из них весьма близки по содержанию обучения, немного отличаясь по названиям. В таблице 4.4 представлены наиболее типичные специальности, с указанием их наименования и кода в реестре специальностей. Нами выделено 18 таких специальностей.

Таблица 4.4

Специальности и направления подготовки выпускников системы высшего профессионального образования в области информатики и ИТ

№	Код специальности (направления)	Наименование специальности (направления)
1	510200	Прикладная математика и информатика
2	511200	Математика. Прикладная математика
3	511300	Механика. Прикладная математика
4	511800	Математика. Компьютерные науки
5	351400	Прикладная информатика (по областям)
6	030100	Информатика
7	351500	Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

№	Код специальности (направления)	Наименование специальности (направления)
8	511900	Информационные технологии
9	230100	Информатика и вычислительная техника
10	230101	Вычислительные машины, комплексы, системы и сети
11	230102	Автоматизированные системы обработки информации и управления
12	230105	Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем
13	230201	Информационные системы и технологии
14	080700	Бизнес-информатика
15	075200	Компьютерная безопасность
16	075400	Комплексная защита объектов информатизации
17	075500	Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем
18	075600	Информационная безопасность телекоммуникационных систем

В этом списке (весьма условно) можно выделить две группы специальностей:

1) связанные с применением информатики и ИТ в исследовательской деятельности, т. е. с целью *получения новых знаний методами компьютерного моделирования*. В таблице 4.4 это специальности с номерами от 1 до 6;

2) связанные с *развитием информационных технологий, обеспечением функционирования ИТ-систем, с ИТ-бизнесом*. В таблице 4.4 это специальности с номерами от 7 до 18.

Отметим, что список специальностей из документа «Профессиональные стандарты в области ИТ» в большей степени связан с вузовскими специальностями второй группы из табл. 4.4.

Содержание обучения в вузах по специальностям, связанным с информатикой и ИТ

Тем из вас, кто планирует после окончания школы поступать в вуз на специальности, связанные с информатикой и ИТ, будет полезно познакомиться с дисциплинами, которые предстоит там изучать. Содержание обучения в вузе, как и в школе, определяется государственными образовательными стандартами. Для каждой специальности в этих документах определены изучаемые дисциплины, их содержание и требования к итогам обучения. Анализируя стандарты по дисциплинам информационно-технологического направления, мы объединили некоторые близкие по содержанию дисциплины в блоки и кратко описали содержания этих блоков. Результаты представлены в табл. 4.5.[1)]

Таблица 4.5

Блоки учебных дисциплин по информатике и ИТ и их содержание

№	Наименование блока дисциплин	Содержание блока
1	Дискретные структуры	Дискретная математика. Математическая логика и теория алгоритмов
2	Основы программирования	Информатика. Программирование на языке высокого уровня
3	Алгоритмы и теория сложности	Алгоритмы и структуры данных. Комбинаторные алгоритмы
4	Архитектура и организация ЭВМ	Информатика. Организация ЭВМ и систем. Архитектура вычислительных систем
5	Операционные системы	Операционные системы. Системы реального времени
6	Распределенные вычисления	Архитектура вычислительных систем. Теория вычислительных процессов. Сети ЭВМ и телекоммуникации. Параллельное программирование
7	Языки программирования	Теория языков программирования и методы трансляции. Функциональное и логическое программирование. Объектно-ориентированное программирование. Разработка языковых процессоров
8	Взаимодействие человека и машины	Человеко-машинное взаимодействие. Программные интерфейсы
9	Графика и визуализация	Компьютерная графика. Инженерная графика. Мультимедиа

1) За основу взята классификация из Computing Curriculum 2008 (http://www.acm.org/education/curricula/ComputerScience2008.pdf).

№	Наименование блока дисциплин	Содержание блока
10	Интеллектуальные системы	Системы искусственного интеллекта. Функциональное и логическое программирование
11	Базы данных и информационные системы	Базы данных. Управление информацией
12	Социальные и профессиональные вопросы программирования	Экономико-правовые основы рынка программного обеспечения. Процесс разработки программных изделий
13	Программная инженерия	Технология разработки программных систем. Метрология программного обеспечения. Метрология, стандартизация и сертификация. Объектно-ориентированные технологии разработки программных систем. Качество и надежность программного обеспечения
14	Методы вычислений	Вычислительная математика. Математическое моделирование. Основы теории управления
15	Компьютерная безопасность	Методы и средства защиты компьютерной информации
16	Теория информации	Измерение информации

? Познакомьтесь с этой таблицей. Подумайте, с элементами каких дисциплин вы познакомились в школьном курсе информатики. Какие из них у вас вызвали наибольший интерес?

Заключение

Вы завершаете изучение школьного курса информатики. Обучение информатике в 10–11 классах на углубленном уровне преследовало цели:

- существенно расширить ваш кругозор, знания и умения в области информатики относительно того уровня, который вы получили в основной школе;
- помочь вам лучше понять свои интересы в этой области, проявить способности в определенном виде информационной деятельности;
- помочь вам в выборе пути дальнейшего профессионального роста, вашей будущей профессии.

Тем из вас, кто выберет для себя профессию специалиста в области информатики и информационных технологий, авторы учебника желают успехов на этом интересном и перспективном жизненном пути.

ОГЛАВЛЕНИЕ